

超导结构的物理与力学基础

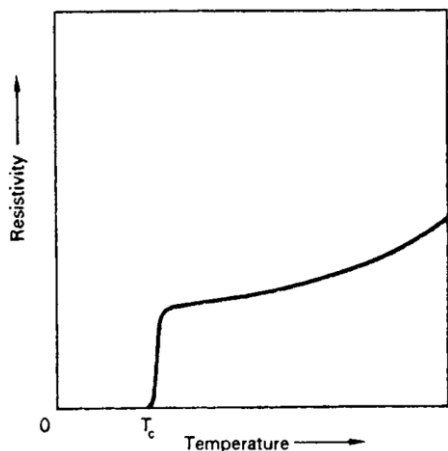
课程教学团队

兰州大学超导体力学研究院

西部灾害与环境力学教育部重点实验室

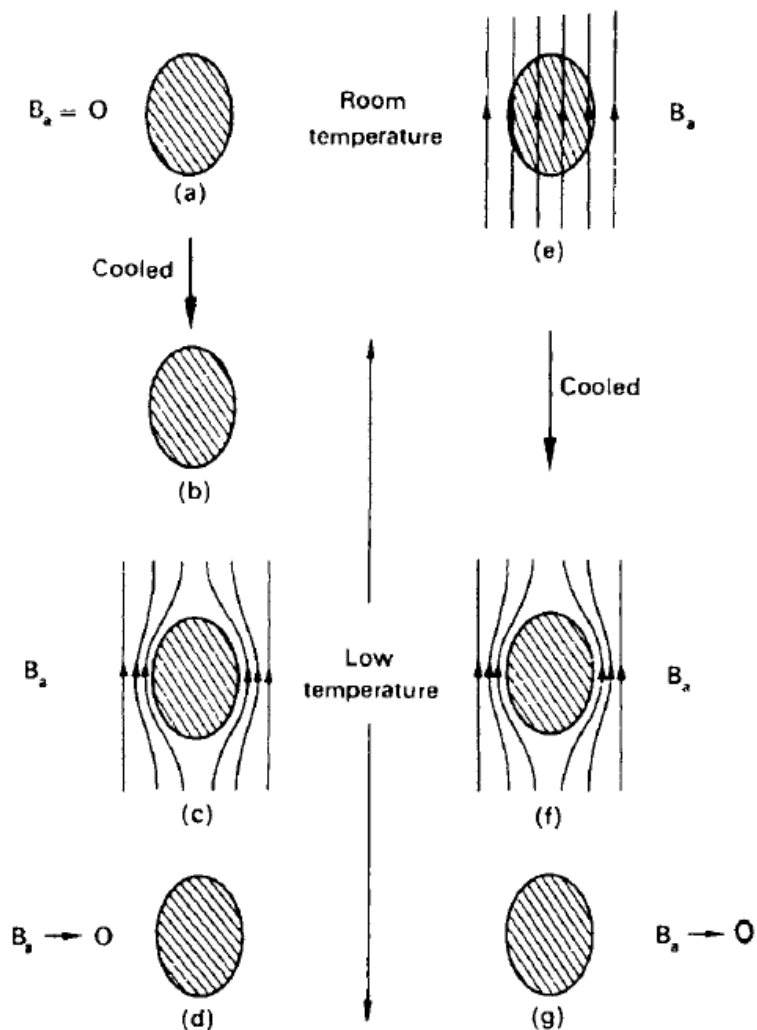
- **超导现象背景**
- **超导材料I-V曲线**
- **高温超导交流损耗与磁热稳定性**
- **超导相变热力学**
- **超导电缆**
- **高温超导薄膜应力测量**
- **高温超导悬浮系统**

超导现象背景



□ 零电阻现象

□ 最终内部磁通量与外磁场初始条件无关，或者说与磁场加载历史无关。超导体内部磁场恒为零——迈斯纳效应。

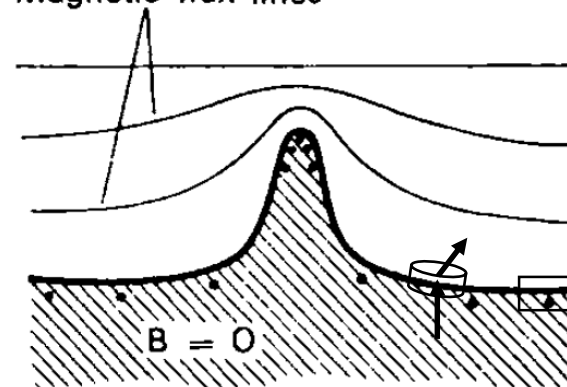


□ 表面电流

超导体内部磁感应强度为零，故内部无电流

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

Magnetic flux lines



磁感应强度界面法向连续

$$\mathbf{B}_{1\perp} = \mathbf{B}_{2\perp} = 0$$

磁感应强度界面切向满足

$$\mathbf{B}_{1\parallel} - \mathbf{B}_{2\parallel} = \mu_0 \mathbf{J} \Delta l$$

超导体外部靠近超导体表面时，磁感线平行于超导体表面，超导电流分布平行于超导体表面的薄层内

超导现象背景——伦敦方程

假设超导电子质量为 m_s , 电量为 q_s , 则

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q_s \mathbf{E}$$

假设超导电子电流密度为

$$\mathbf{J}_s = n_s q_s \mathbf{v}_s$$

$$\frac{m_s}{n_s q_s^2} \frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{m_s}{n_s q_s^2} \frac{d}{dt} \nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s$$

$$\frac{m_s}{n_s q_s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

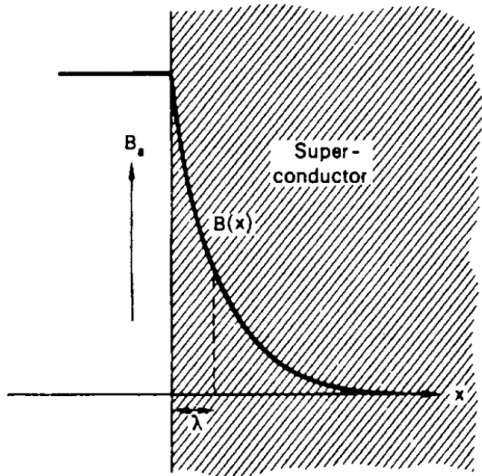
$$\frac{m_s}{n_s q_s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \alpha \nabla^2 \dot{\mathbf{B}}, \text{ 或 } \nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = \alpha \dot{\mathbf{B}}$$

其中 $\alpha = \frac{m_s}{n_s q_s^2 \mu_0}$

伦敦假设 $\nabla^2 \mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{B}$ 其中 $\lambda = \sqrt{\frac{m_s}{n_s q_s^2 \mu_0}}$

一维情形 $\frac{dB}{dx^2} = \lambda^2 B$ 解 $B(x) = B_a e^{-\frac{x}{\lambda}}$



➤ 磁感应强度进入超导体内

部呈指数衰减

➤ 穿透深度位置处 $x = \lambda =$
4

$$\sqrt{\frac{m_s}{n_s q_s^2 \mu_0}}$$

外磁场下降为1/e

伦敦方程

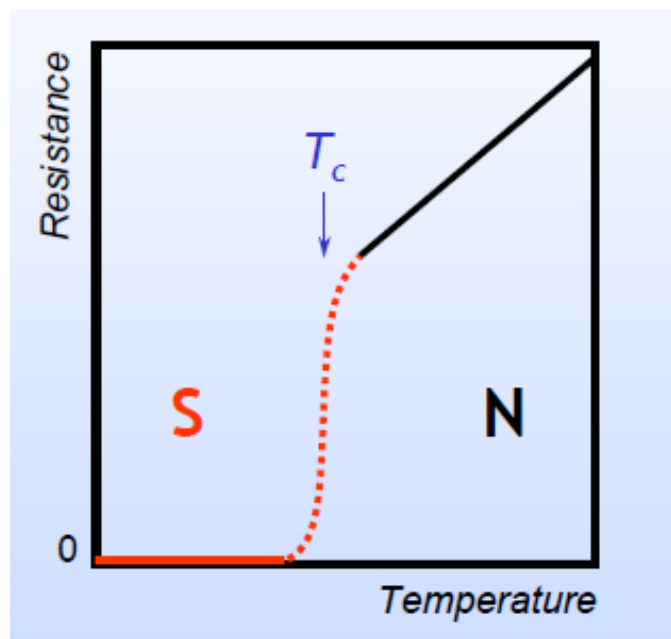
$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{E} & (1) \\ \nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{B} & (2) \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s & (3) \\ \mathbf{J}_n = \sigma' \mathbf{E} & (4) \end{cases}$$

特征: (1) 描述了方程的无阻载流特性,
(2) 描述了超导体的抗磁性

注意: 伦敦方程只是对麦克斯韦方程描述超导体时给出特殊限定。并不能解释超导电性起源。

超导材料I-V曲线特征——基本概念

1、超导体无阻载流



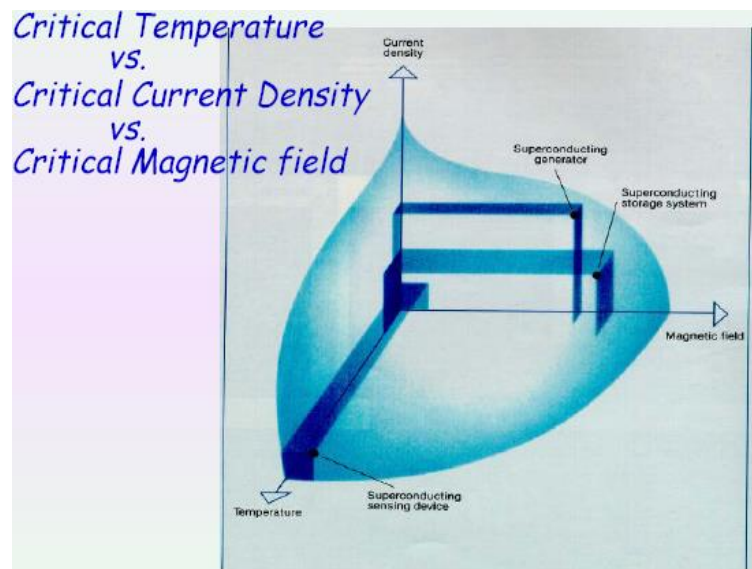
$$\rho \rightarrow 0 \iff \sigma \rightarrow \infty$$

Below the critical temperature:

Effective attractive interaction between electrons
 → Cooper-pairs (typical coherence length $\xi \sim 1-20$ nm)

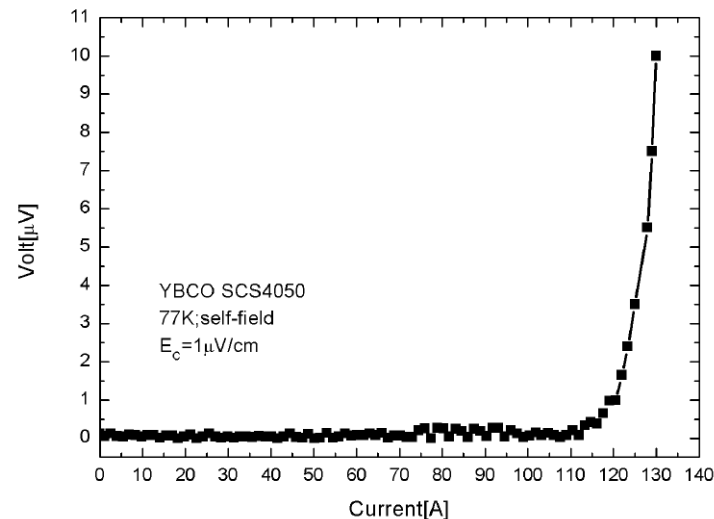
The individual electrons of a Cooper pair can not be scattered at impurities

Silsbee rule: 在Onnes临界磁场基础上提出，输入电流产生场若超过其临界磁场，则超导态恢复至正常态，该输入电流即为**临界电流**。



超导材料**非线性**的电磁本构关系

2、如何测试

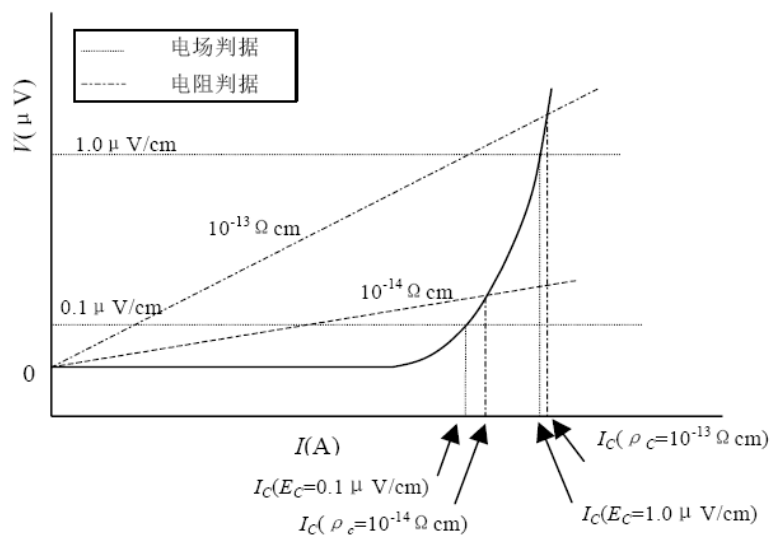


需要思考的几个问题:

- 有效面积的选取;
- 接触电阻效应如何降低;
- 失超判据(电场或电阻)的选取。

超导材料I-V曲线特征——基本概念

3、物理意义

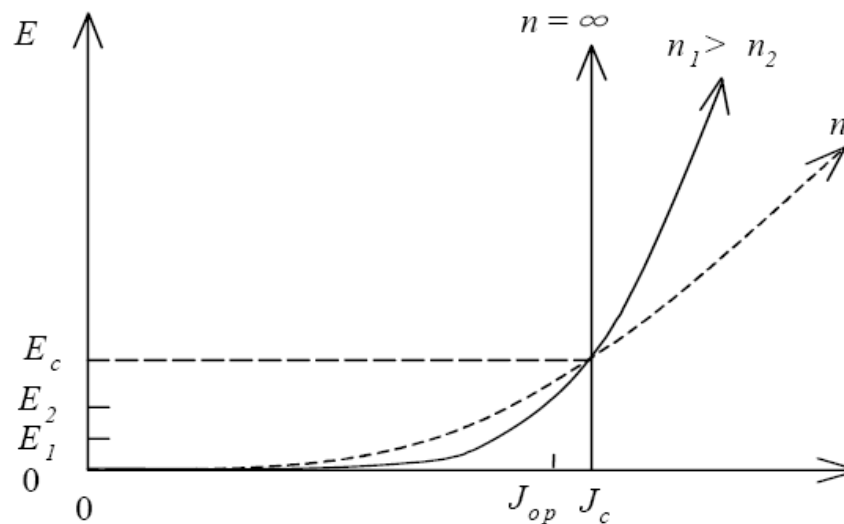


电压判据: $V_c = LE_c$

长度和电场判据

电阻判据: $V_c = I_c \rho_c L / S$

电阻直线和IV曲线交点处的电流, S为横截面积

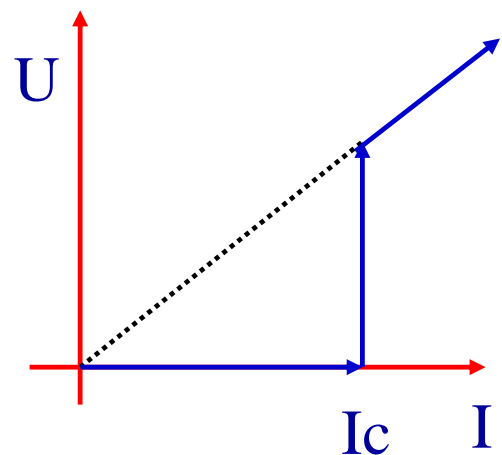


$$V = LE \quad E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n \quad \longrightarrow \quad V = LE_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n$$

n值: 体现了I-V曲线的**非线性度**; 从本质上反映了超导体内部的**均匀性**

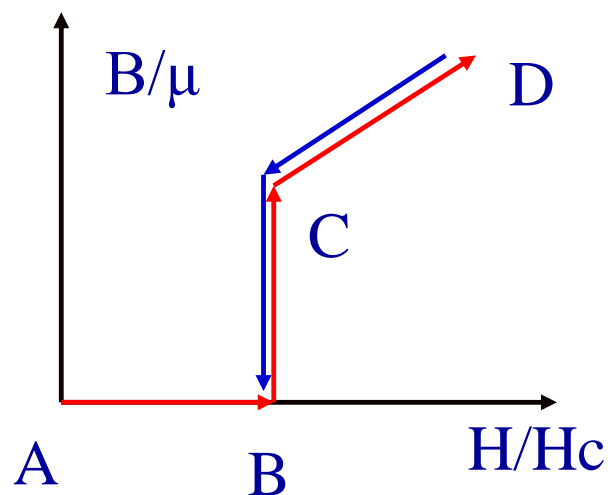
$n_1 > n_2$, 在超导态内, $E_1 < E_2$, 反映了内部损耗的特征。因此n**越大**, 表明其内部更均匀, 超导性能越好。

超导材料I-V曲线特征——一类与理想二类超导体的I-V曲线



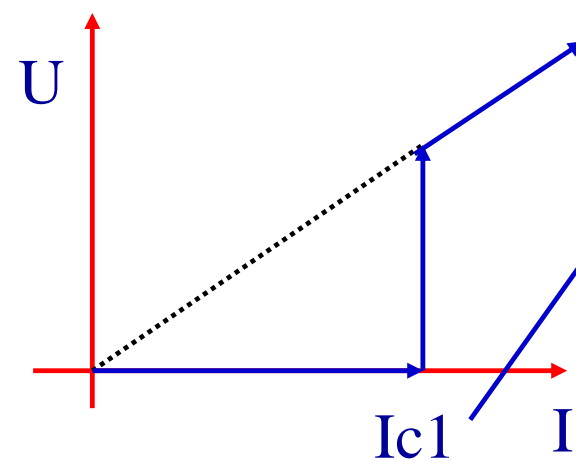
一类超导体I-V曲线

$$n \rightarrow \infty$$



一类超导体磁化曲线

可逆的磁化过程，不存在“磁滞”行为，路径无关

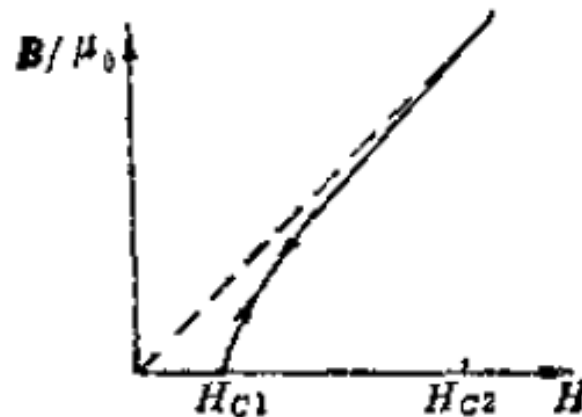


对应于上临界场 H_{c1}

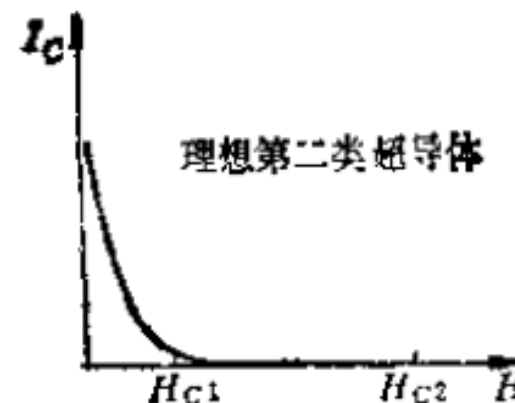
理想二类超导体几乎不具备无阻载流能力。

理想二类超导体I-V曲线

可逆的磁化过程，不存在“磁滞”行为

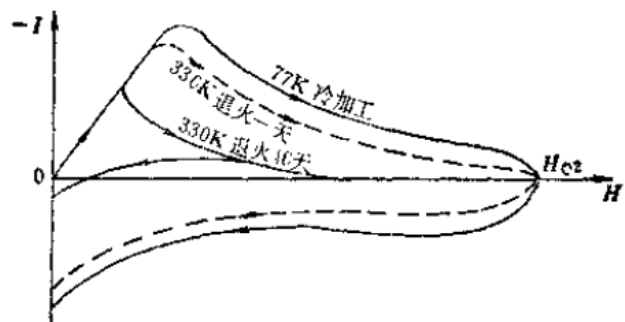


理想二类超导体磁化曲线

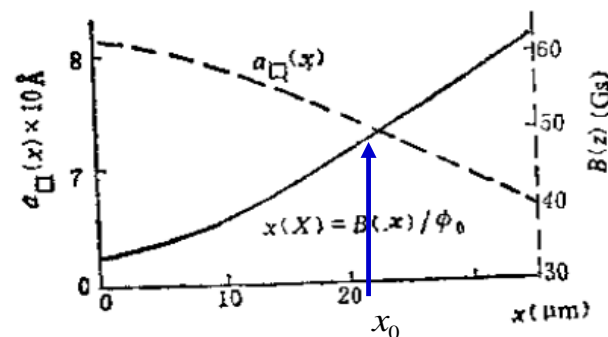


理想二类超导体临界电流随磁场的变化曲线

超导材料I-V曲线特征——非理想二类超导体的I-V曲线



不可逆的磁化曲线其原因在于**晶体缺陷**



非均匀的（静止）磁通格子分布-钉扎力/磁通俘获

超导体内体感应电流J是宏观量，是局域化的涡旋电流j的叠加。

$$\mathbf{J}_s = \langle \mathbf{j}_s \rangle = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

理想二类，宏观量J为零。对于非理想二类超导体，磁通分布不均匀，令： $\mathbf{B}(x) = n(x)\phi_0\mathbf{k}$

则：
$$\mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB(x)}{dx} \mathbf{j} = -\frac{\phi_0}{\mu_0} \frac{dn(x)}{dx} \mathbf{j}$$

表明非理想二类超导体具有磁场下的无阻载流的能力。

钉扎力：

$$\mathbf{F}_D = -\mathbf{F}_J = \mathbf{J}_c \times \mathbf{B}$$

$\mathbf{J} > \mathbf{J}_c$ ，磁通格子运动

$\mathbf{J} < \mathbf{J}_c$ ，磁通格子稳定

$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c$ ，磁通格子处于稳定的临界状态， \mathbf{J}_c 值由钉扎力密度 \mathbf{F}_J 决定。

\mathbf{J}_c 为非理想二类超导体的临界电流密度。

出现各种**临界态模型**，此处不作介绍。

超导材料I-V曲线特征——非理想二类超导体的I-V曲线

磁通格子运动分析模型：

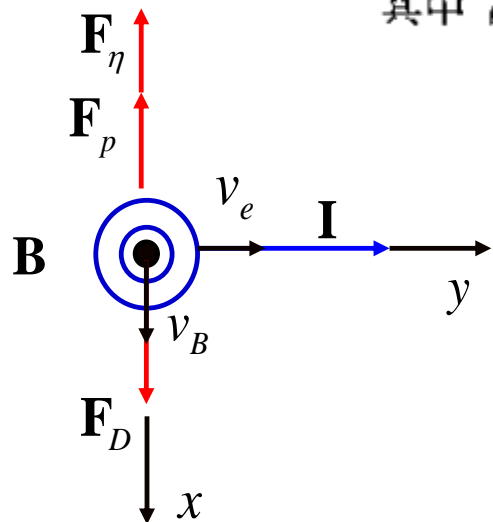
力平衡方程： $\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_c = 0$

粘性阻力： $\mathbf{F}_\eta = -\eta n \mathbf{v}_B = -\eta \frac{B}{\phi_0} \mathbf{v}_B$

化简： $JB - J_c B - \frac{B}{\phi_0} \eta v_B = 0$

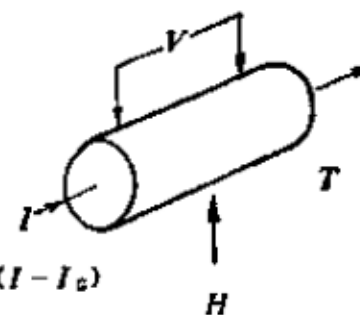
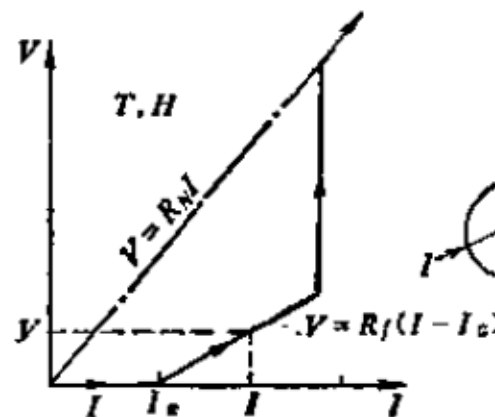
解得： $v_B = \frac{\phi_0 (J - J_c)}{\eta}$
 仅存在y方向电场： $E_y = v_B B$

其中 $\rho_f = \phi_0 B / \eta$, 称为磁通流阻率。

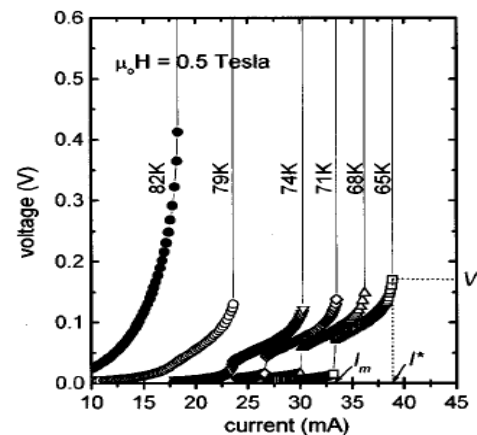


$$V = (I - I_c) R_f$$

其中 $R_f = \rho_f L / A$ 称为磁通流阻, L 为样品 y 方向长度, A 为样品的截面积。



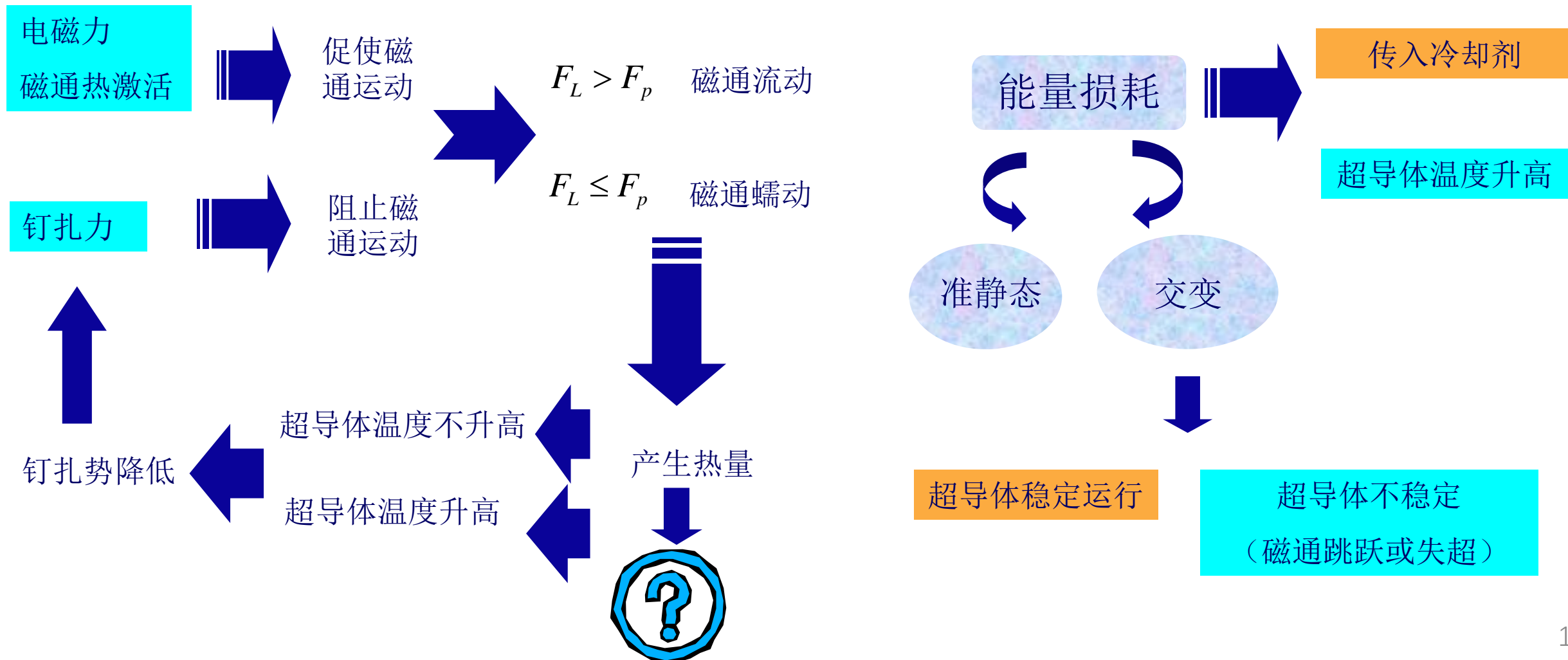
非理想二类超导体的I-V曲线



- LO 模型;
- 热电子模型
- 热点效应
- 涡结晶
- 相滑移
- G-L求解

高温超导交流损耗与磁热稳定性分析

☞ 超导体在外磁场作用下的磁热相互作用



高温超导交流损耗与磁热稳定性分析



磁通动力学研究

□ 磁通流动

- *Bardeen*和*Stephen* (1965) 低温超导体磁通流动的*BS* 描述。
- 高温超导体？

□ 低温非理想II型超导体（磁通蠕动）

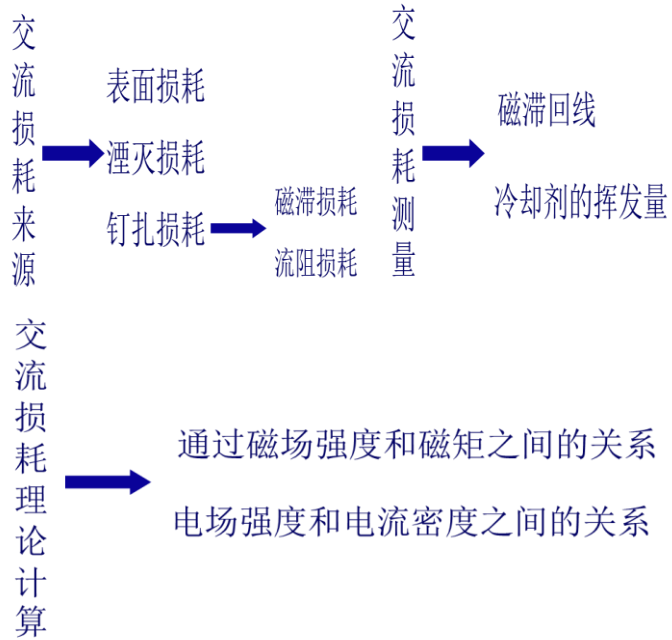
- *Bean* (1962, 1964) 提出临界态概念。
- *Kim* 和*Anderson* (1962) 超导体中存在的最大钉扎力是一个与磁场无关的常数，并提出热激活的概念，建立了*Anderson-Kim* 热激活磁通蠕动模型。
- *Beasley* (1969) 首次把超导体的磁通运动用扩散方程表示。
- *Tinkham* (1975) 考虑了驱动力密度反方向的磁通蠕动。

□ 高温超导体（磁通蠕动）

- *Griessen*等人 (1990) *Van de Beek*等人 (1992) 推广*Anderson-Kim* 热激活磁通蠕动模型，导出了钉扎势与电流密度、电场强度与电流密度以及磁矩与时间的关系。
- *Hagen*与*Griessen* (1989) 修正*Kim-Anderson*热激活模型，在热激活模型中加入了激活能分布函数，并在*Anderson*理论中加进了磁通的流动。
- *Fisher*等人 (1989) 涡旋玻璃态模型。
- *Natterman* (1990) 和*Feigel`man*等人 (1989, 1991) 集体钉扎理论。
- *Zeldov*等人 (1989) 钉扎势与电流密度之间是对数关系。
- *Yin*等人 (1994) 认为磁通蠕动过程中要受到粘滞阻尼的作用，粘滞阻尼使钉扎势垒升高，在*Tinkham*工作的基础上加进了粘滞阻尼对于磁通蠕动的的影响。
- 张裕恒等人 (1997) 在考虑了磁通涡旋线从低势能到高势能的反向跃迁后，对*Tinkham* 的模型又进行了修正。

高温超导交流损耗与磁热稳定性分析

交流损耗研究

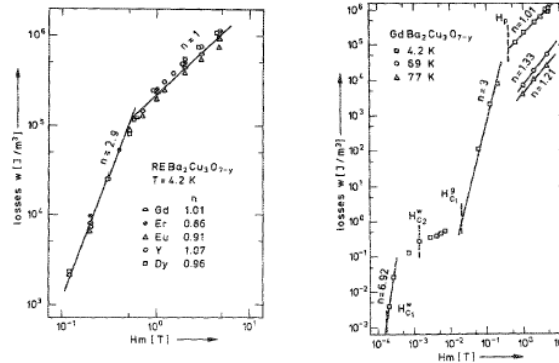


非理想II型低温超导体

- 基于 *Bean* 模型
- *Ohmer* 与 *Hearich* (1973) 基于 *Kim* 模型计算了 *NbTi* 超导圆筒在平行圆筒主轴的外磁场作用下的磁滞损耗

高温超导体 (实验研究)

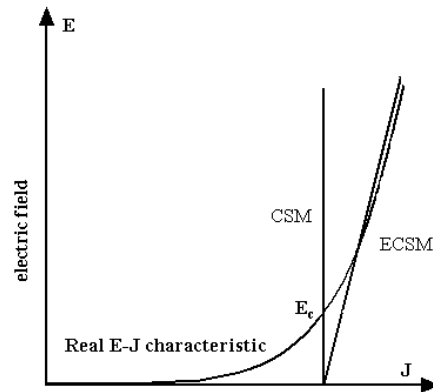
Xu 等人的实验结果



高温超导体 (理论研究) — 基于 *M-H*

Orehtsky 等人 and *Valkhov* 等人用 *Bean* 模型解释了 H^3 区域与 H 区域
Ciszek 等人借助于 *Kim* 模型解释了 H^4 区域
Xu 等人 and *Zannela* 等人用高温超导体晶粒之间存在弱连接解释了 H^{-7} 区域
Johansen 与 *Bratsberg* 用指数模型 $J_c = J_{c0} e^{-B/B_0}$ 和 *Kim* 模型计算了超导矩形截面柱、超导圆筒的磁滞损耗。
Hetland 等人用模型 $J_c = J_{c0} / (1 + B/B_0)^n$
 王银顺和林良真用临界态模型 $J_c = \beta B^{-p}$
Brant 从磁矩的定义出发研究交流损耗

高温超导体 (理论研究) — 基于 *E-J*

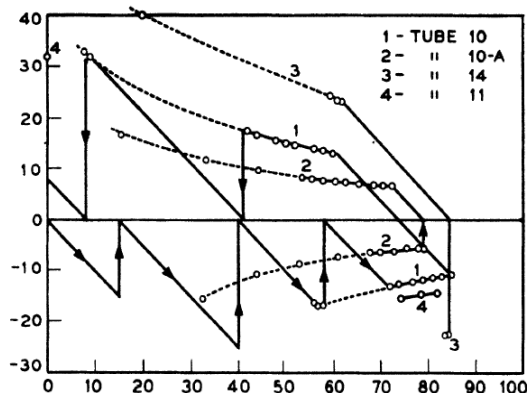


Sokolovsky 等人 (1998) 广义临界态模型的 *E-J* 关系
Kajikawa 等人用幂指数表示的 *E-J* 关系
Sokolovsky 与 *Meerovich* 采用 *Bean* 模型联合求解电磁场与温度场方程
Zhao 等人求解电磁场与温度场方程计算了流动态的交流损耗
Meerovich 等人 建议采用更符合实验的 *E-J* 关系联合求解电磁场与温度场方程
Carr Jr 考虑晶间弱连接, 建议在计算中采用最能反映超导材料电磁物理特性的本构关系

高温超导交流损耗与磁热稳定性分析

磁通跳跃研究

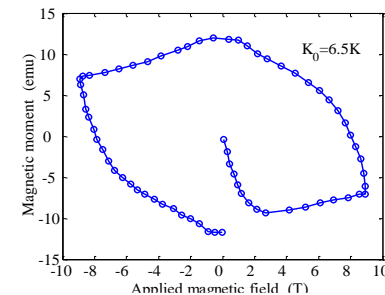
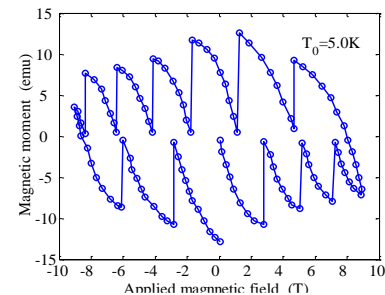
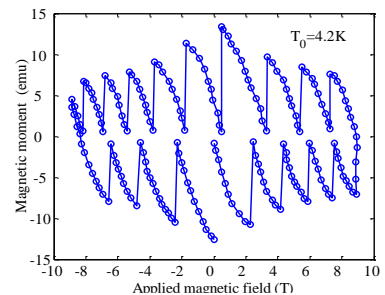
实验现象



实验方法

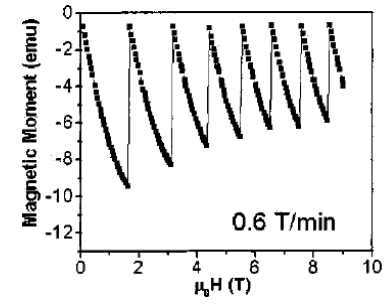
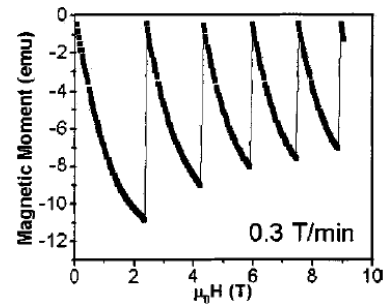
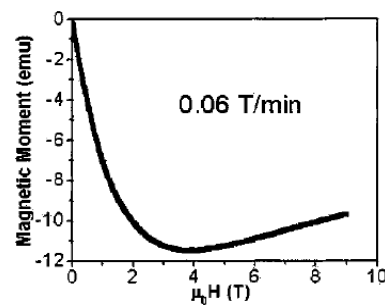
- Kim等人 (1963) 仅测量圆筒中央的磁场变化
- *Neuringer*与*Shapira* 同时测量超导体磁场与温度的变化
- Hall探针法: 针对高温氧化物超导体、 MgB_2 和有机物超导体
- 超导量子干涉器 (SQUID)制成的磁强计测量超导体的磁场强度
- 磁光效应法

Nb₂Sn的磁滞回线



$$v_{ex} = 50G / s$$

熔融织结的BaSrCaCuO超导材料的磁滞回线



$$T_0 = 4.2K$$

超导相变热力学——热力学基本概念



1. 体系和环境

体系(system): 研究的对象是大量分子、原子、离子等物质微粒组成的宏观集合体。人为地将所研究的一定范围的物体或空间与其余部分分开，作为我们研究的对象。

环境(surroundings): 体系的周围部分

2. 系统的状态和状态函数

状态: 体系有一定的外在的宏观表现形式，这每一个外在表现形式称作体系的一个状态。描述体系状态的物理性质(如温度、压力、体积、质量等等)称为体系的**状态函数**

3. 系统的过程与途径

过程: 系统由始态变化到终态的过渡。

途径: 完成过程的具体步骤。系统由始态变化到终态所经历的过程的总和。

4. 热力学平衡态

系统在一定环境条件下，经足够长的时间，其各部分可观测到的宏观性质都不随时间而变，此时系统所处的状态叫**热力学平衡态**。

热力学系统，必须同时实现以下几个方面的平衡，才能建立热力学平衡态：

- (i) **热平衡**—系统各部分的温度 T 相等；若系统不是绝热的，则系统与环境的温度也要相等
- (ii) **力平衡**—系统各部分的压力 p 相等；系统与环境的边界不发生相对位移。
- (iii) **质平衡**—体系和环境所含有的质量不随时间而变。
- (iv) **化学平衡**—若系统各物质间可以发生化学反应，则达到平衡后，系统的组成不随时间改变。

超导相变热力学——热力学基本规律

1、热力学第零定律（热平衡定律）和温度

热力学第零定律：若A 与B热平衡，B 与C 热平衡时，A 与C 也同时热平衡。

“温度”的概念是基于这现象为基础，而后才能被建立起来的

温度：处在同一热平衡状态的所有的热力学系统都具有一个共同的宏观特征，这一特征是由这些互为热平衡系统的状态所决定的一个数值相等的状态函数，这个状态函数被定义为温度。温度相同为热平衡的充分条件。

2、热力学第一定律（能量守恒和转化）

能量可以相互转化，但总的能量不变。
Energy can be neither created nor destroyed.

第一定律的数学表达式： $\Delta U = Q - W$

物理意义：体系内能的增量等于体系吸收的热量减去体系对环境作的功。包括体系和环境在内的能量守恒。

3、热力学第二定律

热力学第二定律：“任何体系，若是不受外界影响，体系总是单向地趋向平衡状态。”

平衡状态是体系的一种特殊状态，在这种状态下，如果没有外界干扰，体系的各部分在长时间内不发生任何变化，因此，达到平衡状态就意味着过程的终止。

➡ 平衡状态是过程的极限状态。

4、热力学第三定律

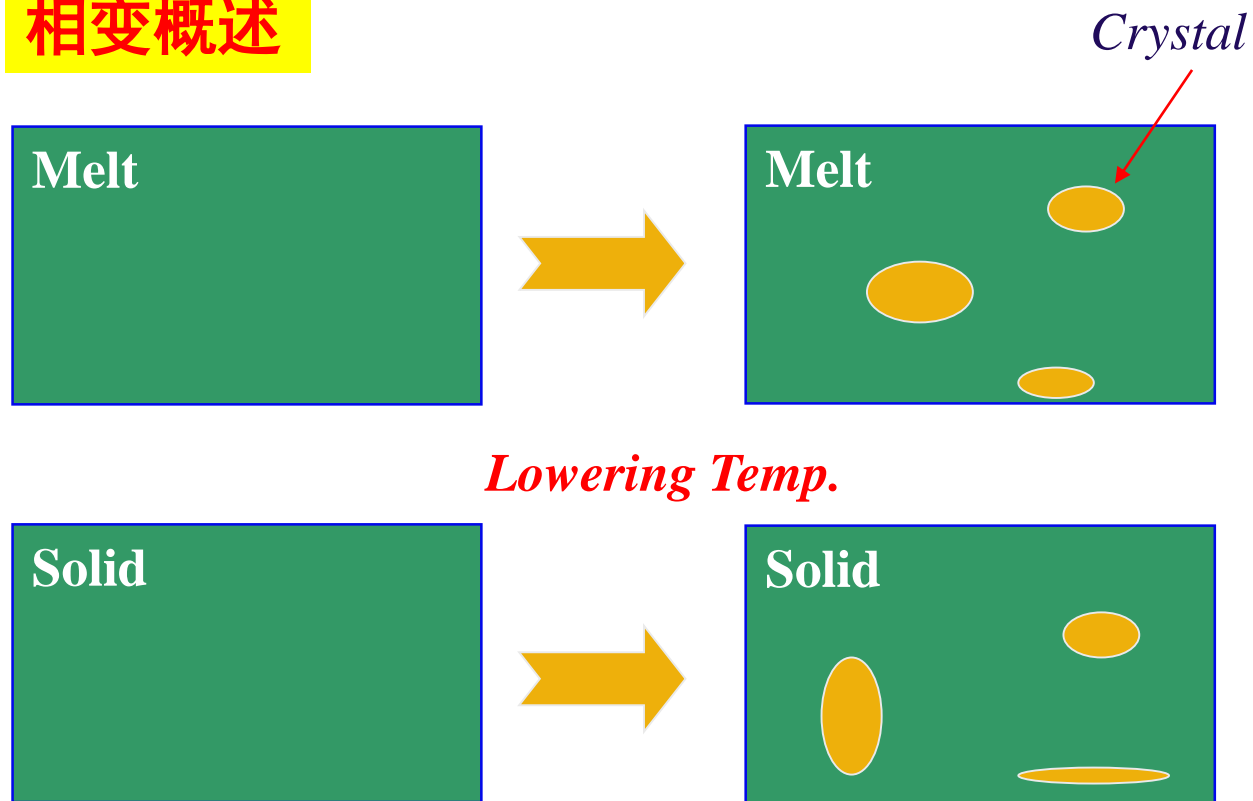
普朗克假设经路易斯和吉布逊修正后，可表述为：“在0K时任何纯物质的完美晶体的熵值等于零。”这是热力学第三定律的一种表达形式。



超导相变热力学——相变基础



相变概述



相变种类繁多,可按不同方式分类:

(1) 按热力学分类
一级相变
二级相变

(2) 按相变方式分类
不连续相变
连续相变

(3) 按原子迁移特征分类
扩散型相变
无扩散型相变

相变: 在均匀单相内,或在几个混合相中,出现了不同成分或不同结构(包括原子、离子或电子位置位的改变)、不同组织形态或不同性质的相。

磁化物体的Gibbs自由能

1) 设一物体在磁场中被磁化，磁感应强度B增加dB时，磁场所做的微功(MKSA单位制):

$$dW = V\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

根据: $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{I}$

其中I为磁化强度，则可得:

$$\begin{aligned} dW &= V\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = V\mathbf{H} \cdot \mu_0 d(\mathbf{H} + \mathbf{I}) \\ &= \mu_0 V d\left(\frac{1}{2}H^2\right) + \mu_0\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \end{aligned}$$

其中M=VI为总磁矩

2) 内能的改变:

$$dU = TdS - pdV$$

考虑磁场的微功:

$$dU = TdS - pdV + V\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

代入可得:

$$dU = TdS - pdV + \mu_0 V d\left(\frac{1}{2}H^2\right) + \mu_0\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$$

忽略第三项:

$$dU = TdS - pdV + \mu_0\mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$$

无磁化功时的自由能表达式:

$$F = U - TS$$

超导相变热力学



磁化物体的Gibbs自由能

3) Gibbs自由能:

$$G = U + PV - TS = F + PV$$

考虑磁化效应得:

$$F = U - TS \quad \Rightarrow \quad dF = dU - d(TS)$$

$$= dU - TdS - SdT$$

$$dU = TdS - pdV + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$$

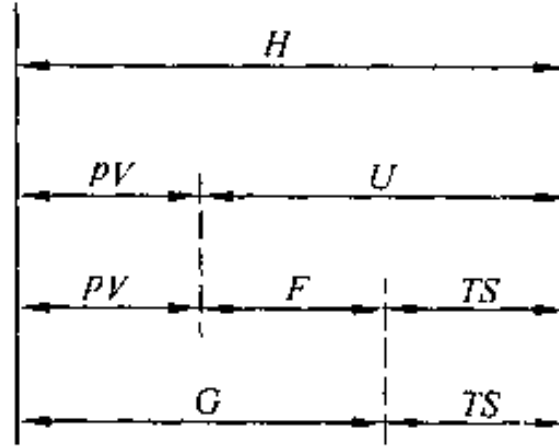
$$dF = TdS - pdV + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} - TdS - SdT$$

$$= -SdT - pdV + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$$

$$dG = dF + d(PV)$$

$$= -SdT - pdV + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} + pdV + Vdp$$

$$= -SdT + Vdp + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$$



4) 考虑到M与H同向,

$$\mu_0 d(\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) = 0$$

$$\text{即: } \mu_0 d\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} + \mu_0 d\mathbf{H} \cdot \mathbf{M} = 0$$



$$\mu_0 d\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 d\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$$

代入上式:

$$dG = -SdT + Vdp + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$$

$$= -SdT + Vdp - \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$$

结合恒温恒压条件:

$$dG = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$$

积分:

$$G(T, p, H) - G(T, p, 0)$$

$$= -\mu_0 \int_0^H \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$$

$$= -\mu_0 V \int_0^H \mathbf{I} \cdot d\mathbf{H}$$

超导相变热力学

在磁场中超导态的自由能

细长超导体圆柱在纵向磁场中被均匀磁化的情形:(处于超导态)

$$\mathbf{I} = \chi_m \mathbf{H} \quad \chi_m = -1$$

磁化系数等于-1.

$$\begin{aligned} G(T, p, H) - G(T, p, 0) &= -\mu_0 \int_0^H \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} \\ &= -\mu_0 V \int_0^H \mathbf{I} \cdot d\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \end{aligned}$$

或者: $G(T, p, H) = G(T, p, 0) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$

在超导态: $G_s(T, p, H) = G_s(T, p, 0) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$

$$G_s(T, p, H) = G_s(T, p, 0) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

对超导体而言, 由于负磁化强度的特征, 在外加磁场H中超导体的自由能增大。

对于正常态的超导体, 由于磁化系数很小, $\chi_m \approx 0$, 因此可得, 对于正常态超导体而言, 在磁场等于0和H处其自由能几乎相当。即,

$$G_n(T, p, H) \approx G_n(T, p, 0) > G_s(T, p, 0)$$

所以, 在没有外加磁场时, 超导体的自由能比正常态自由能低, 超导相稳定存在。

超导相变热力学

在磁场中超导态的自由能

在临界场 H_c 发生超导正常转变，相变平衡条件：

$$G_n(T, p, H_c) = G_s(T, p, H_c)$$

另可写为：

$$G_n(T, p, H_c) \approx G_n(T, p, 0) = G_s(T, p, 0) + \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2$$

代入体积 V ，得：

$$G_n(T, p, 0) - G_s(T, p, 0) = \frac{1}{2} \mu_0 V H_c^2$$

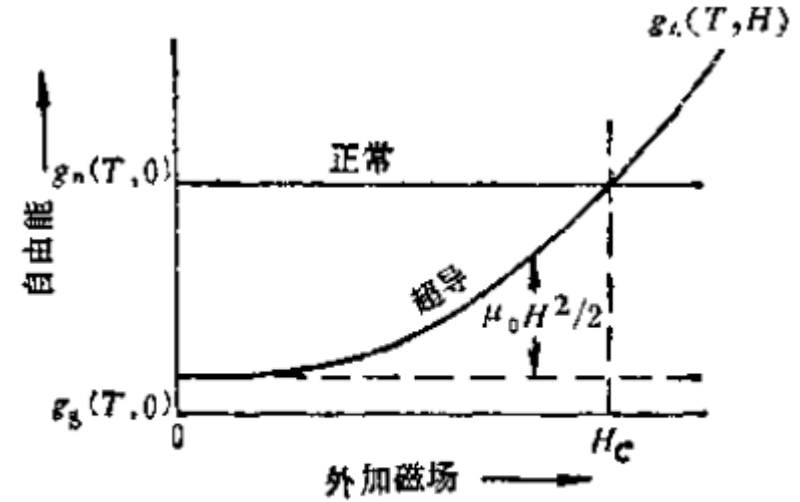


图 2-1 超导态及正常态的吉布斯自由能随 H 变化的曲线

Gorter-Casimir 公式

$$G_n(T, p, 0) - G_s(T, p, 0) = \frac{1}{2} \mu_0 V H_c^2$$

临界磁场的物理意义：临界磁场是在零场下正常相与超导相的Gibbs自由能差的量度。

超导相变热力学

超导正常相变的熵变化

根据热力学公式： $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T$

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_V = -P$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S$$

将下面的公式，两边对T求偏导：

$$G_n(T, p, 0) - G_s(T, p, 0) = \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2$$

可得：

$$s_n(T, p, 0) - s_s(T, p, 0) = -\mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT}$$

其中s表示单位体积的熵。

根据熵的定义：

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

可得相变潜热：

$$q = T(s_n - s_s) = -\mu_0 T H_c \frac{dH_c}{dT}$$

根据相图，可知：

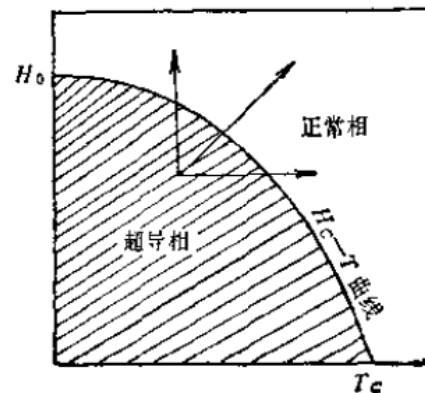
$$\frac{dH_c}{dT} < 0$$

因此，在 $T < T_c$ 的任何温度下， $S_n > S_s$

与正常相相比，超导相更加有序。



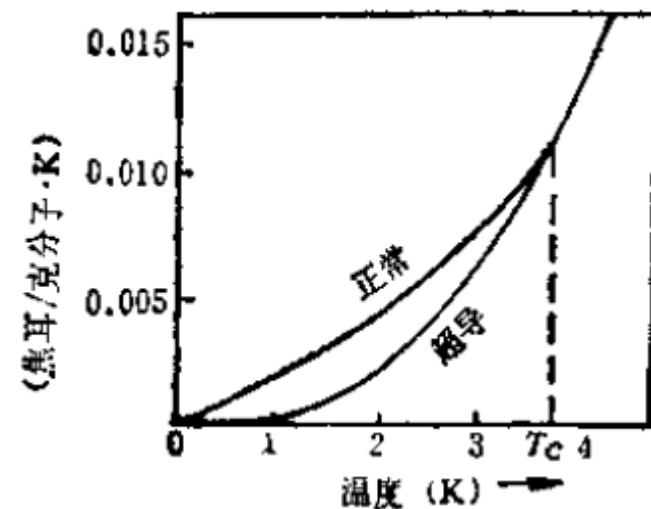
为后来的超导研究指明了方向——二流体维像模型。



根据热力学第三定律：**0K**是纯物质的熵值为0。

对超导体而言， $T_c \rightarrow 0K \rightarrow s_n \rightarrow s_s$ ，
上面的式子中， $H_c \neq 0$ ，因此 $dH_c/dT = 0$ 。

另外， $T = T_c$ 时， $s_n = s_s$ ，与实验结果一致。



锡正常态和超导态的熵

超导相变热力学

超导正常相变的比热变化

根据热力学公式：

$$c = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$$

将下面的公式，两边对T求偏导，再乘T：

$$s_n(T, p, 0) - s_s(T, p, 0) = -\mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT}$$

可得：

$$c_n(T, p, 0) - c_s(T, p, 0) = -\mu_0 T \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 - \mu_0 T H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2}$$

其中c表示单位体积的比热。

可得：

$$c_s(T, p, 0) - c_n(T, p, 0) = \mu_0 T \left[\left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 + \mu_0 H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2} \right]$$

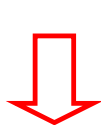
当T=Tc时，Hc=0

在超导转变温度处有：

$$c_s(T, p, 0) - c_n(T, p, 0) = \mu_0 T \left[\left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 \right]_{T=T_c} > 0$$

此为拉特杰而公式，表示在T=Tc处，

H=0超导-正常相变有比热跃变。 **无潜热**



二级相变



$$\left\{ \begin{array}{l} q = -\mu_0 T H_c \frac{dH_c}{dT} = 0 \\ \Delta c = \mu_0 T \left[\left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 \right]_{T=T_c} > 0 \end{array} \right.$$

再考虑相变潜热公式：

比热突变

$$q = -\mu_0 T H_c \frac{dH_c}{dT} = 0$$

如果T<Tc，H不等于0，即存在相变潜热，属于**一级相变**。

研究进展回顾

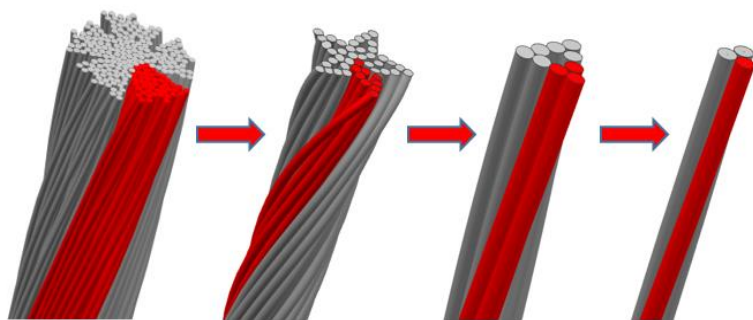
- 1924年, Kessom建议将相变热力学应用到超导特性研究中;
- 1934年, 出现Gorter-Casimir 公式, 弄清临界磁场的物理意义;
- 1934,1936年, Rutgers公式出现, $T=T_c$, $H=0$, 超导正常转变为二级相变;
- 1937年, Kessom等人实验验证了超导态时熵低于正常态的理论结果。

总结

- 超导-正常转变特征与外界条件有关, 直接显示出相变热力学这一研究手段的局限性;
- 相变热力学最主要的作用是发现**超导相比正常相更加有序**, 为后来**二流体唯象模型**的诞生指明了方向;
- 近年来采用相变热力学来研究超导特性这一手段已经淡出视线;
- 希望可以学到这个思路, 并将其引用到其他材料的研究上去。

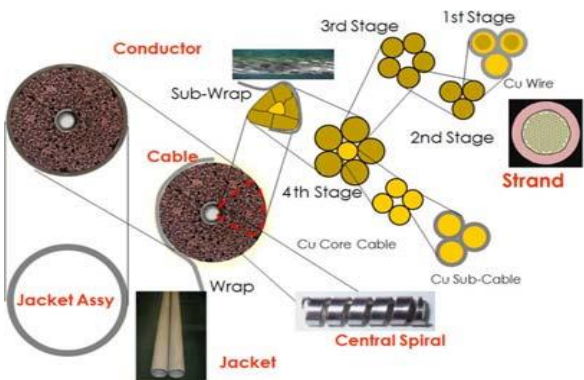
超导电缆研究

➤ CICC导体(TF线圈)的结构描述



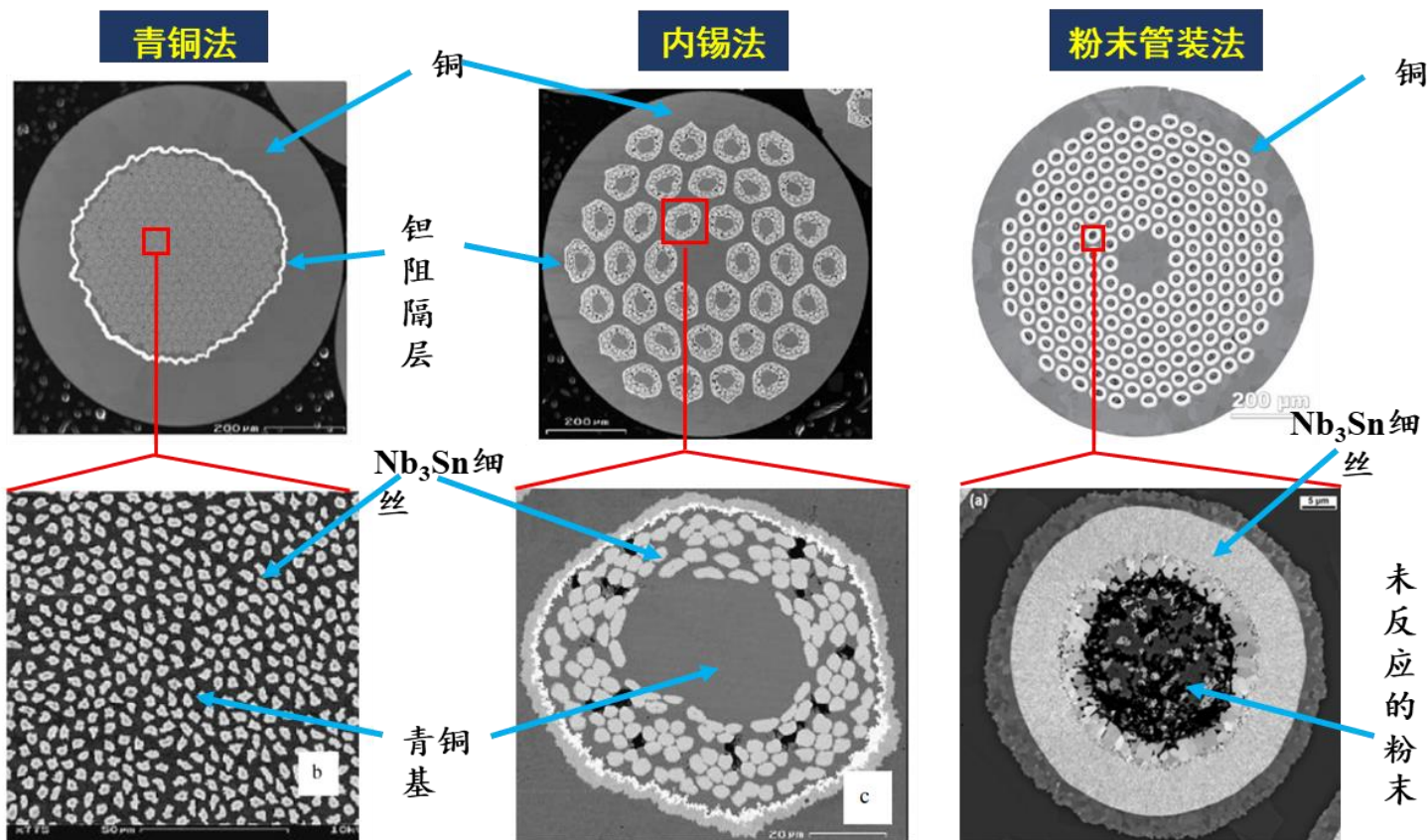
CICC导体(TF线圈)前四级结构图

- 第一级是一个三元组，由三根股线缠绕而成。
- 第二级为三根一级子缆组成的3×3结构的高一级子缆。
- 第三级结构为3×3×5，即5个二级子缆缠绕而成。
- 第四级为一个花瓣由237根股线组成，排列成3×3×5×5+3×4。



TF导体结构

➤ CICC超导股线制备方法(以Nb₃Sn股线为例)



Boso et al, Supercond. Sci. Technol. 2009, 22:125012

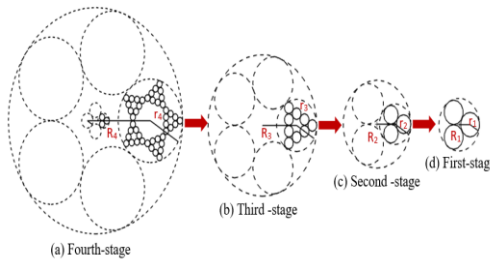
Boso et al, Supercond. Sci. Technol. 2009, 22:125012

Tarantini et al, Supercond. Sci. Technol. 2015, 28:095001

超导电缆研究——多级结构CICC超导电缆参数模型的建立



➤ 多级结构CICC超导电缆模型的建立



CICC超导电缆(TF线圈)1-4级结构的截面示意图

- 一级电缆的结构为2+1，由两根Nb₃Sn股线和一根Cu股线绞成；
- 二级电缆的结构为3×3，由三根一级子缆绞成；
- 三级电缆的结构为3×3×5，由五根二级子缆绞成；
- 四级电缆的结构为3×3×5×5+3×4，由五根三级子缆绞成，中心位置包含一根3×4的二级子缆

➤ CICC超导电缆一级电缆模型的建立

一级电缆中心线轨迹方程：
$$C_{1,j} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos(2\pi \cdot e_1 \cdot t + \varphi_{1,i}) \\ r_1 \cdot \sin(2\pi \cdot e_1 \cdot t + \varphi_{1,i}) \\ p_1 \cdot e_1 \cdot t \end{pmatrix}$$

在上式中： $j = 1, 2, 3$ ， $i = 1, 2, 3$ ， $t \in [0, 1]$ ； r_w 为Nb₃Sn股线和Cu股线的半径； $r_1 = r_w \cdot 2/\sqrt{3}$ 为一级电缆的螺旋半径； n_1 为一级电缆绞距个数； $\varphi_{1,1}$ 和 $\varphi_{1,2}$ 为两根Nb₃Sn股线中心线轨迹的起始位置； $\varphi_{1,3}$ 为Cu股线中心线轨迹的起始位置； p_1 为一级电缆的绞距； $l_1 = p_1 \cdot n_1$ 为整个股线的长度。



CICC超导电缆一级电缆模型的建立

➤ CICC超导电缆二级电缆模型的建立

二级电缆中心线轨迹方程：

$$C_{2,j} = \begin{pmatrix} r_2 \cdot \cos(2\pi \cdot e_2 \cdot t + \varphi_{2,i}) \\ r_2 \cdot \sin(2\pi \cdot e_2 \cdot t + \varphi_{2,i}) \\ p_2 \cdot e_2 \cdot t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & \sin(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & 0 \\ -\sin(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & \cos(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_1$$



CICC超导电缆二级电缆模型的建立

在上式中： $j = 1, 2, 3$ ， $i = 1, 2, 3$ ， $t \in [0, 1]$ ； r_2 为二级电缆的螺旋半径； n_2 为二级电缆绞距个数； $\varphi_{2,j}$ 为二级电缆中3个一级子缆中心线轨迹的起始位置； p_2 为二级电缆的绞距。

➤ CICC超导电缆三级电缆模型的建立

$C_{3,j}$ 三级电缆中心线轨迹方程

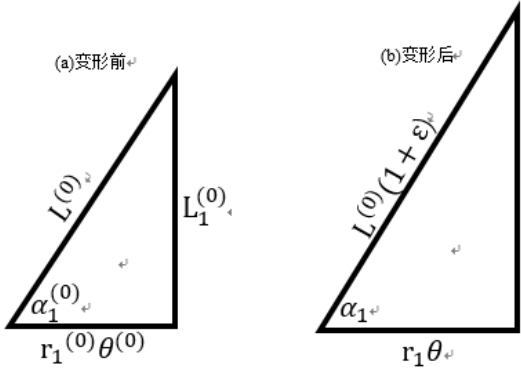
$$= \begin{pmatrix} r_3 \cdot \cos(2\pi \cdot e_3 \cdot t + \varphi_{3,i}) \\ r_3 \cdot \sin(2\pi \cdot e_3 \cdot t + \varphi_{3,i}) \\ p_3 \cdot e_3 \cdot t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(-2\pi \cdot e_2 \cdot t) & \sin(-2\pi \cdot e_2 \cdot t) & 0 \\ -\sin(-2\pi \cdot e_2 \cdot t) & \cos(-2\pi \cdot e_2 \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_2 + \begin{pmatrix} \cos(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & \sin(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & 0 \\ -\sin(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & \cos(-2\pi \cdot e_1 \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_1$$

在上式中： $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ， $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ， $t \in [0, 1]$ ； r_3 为三级电缆的螺旋半径； n_3 为三级电缆绞距个数； $\varphi_{3,j}$ 为三级电缆中5个二级子缆中心线轨迹的起始位置； p_3 为三级电缆的绞距。

超导电缆研究——CICC多级结构应力分析理论模型



一级子缆经历轴向拉伸应变时，几何参数的变化：



变形和未变形状态下的曲率和扭率：

$$\kappa^{(0)} = 0; \kappa'^{(0)} = \frac{\cos^2 \alpha_1^{(0)}}{r_1^{(0)}}; \tau = \frac{\sin \alpha_1^{(0)} \cos \alpha_1^{(0)}}{r_1^{(0)}}$$

$$\kappa = 0; \kappa' = \frac{\cos^2 \alpha_1}{r_1}; \tau = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{r_1}$$

平衡方程

$$N' = H\kappa' - G'\tau$$

$$X = N'\tau - T\kappa'$$

$$Y = Z = 0$$

本构方程

$$H = \frac{\pi R^4 E}{4(1 + \nu)} (\tau - \tau^{(0)})$$

$$G' = \frac{\pi R^4 E}{4} (\kappa' - \kappa'^{(0)})$$

$$G = \frac{\pi R^4 E}{4} (\kappa - \kappa^{(0)}) = 0$$

$$T = \pi R^2 E \epsilon_0$$

$$R = R^{(0)}(1 - \nu \epsilon)$$

给定 $\epsilon_i (i = 0, 1, 2, 3)$ ，求解 α_i 和 ϵ_0 。

$$\epsilon_{i-1} = \frac{(1 + \epsilon_i) \sin \alpha_i^{(0)}}{\sin \alpha_i} - 1$$

$$B_i = -\frac{r_i^{(0)}(1 + \epsilon_i)}{\beta_i + \cot \alpha_i^{(0)}}$$

$$A_i \sin \alpha_i + B_i \cos \alpha_i = C_i$$

$$C_i = r_{i-1}^{(0)} \nu (1 + \epsilon_i) \sin \alpha_i^{(0)} \csc \frac{\pi}{n}$$

$$A_i = r_i^{(0)} + r_{i-1}^{(0)} \nu \csc \frac{\pi}{n}$$

多级股线受拉伸作用，初始旋转半径和旋转半径分别为：

$$r_1^{(0)} = 0.468 \text{ mm}$$

$$r_1 = r_1^{(0)} - R^{(0)} \nu \epsilon \csc \frac{\pi}{n}$$

$$r_2^{(0)} = 0.936 \text{ mm}$$

$$r_2 = r_2^{(0)} - r_1^{(0)} \nu \epsilon_1 \csc \frac{\pi}{n}$$

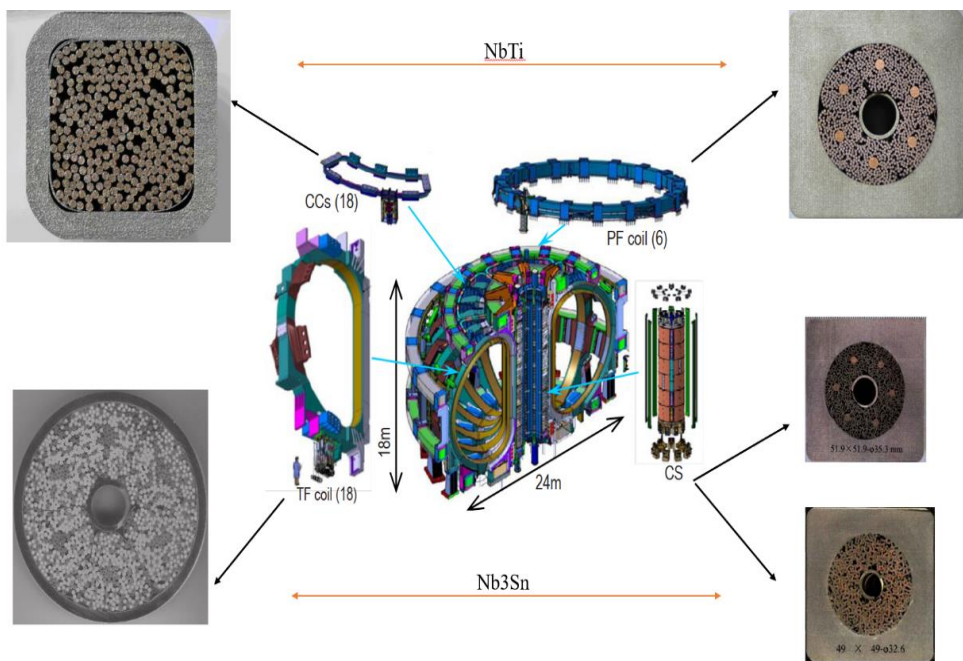
$$r_3^{(0)} = 3.065 \text{ mm}$$

$$r_3 = r_3^{(0)} - r_2^{(0)} \nu \epsilon_2 \csc \frac{\pi}{M}$$



$$\alpha_i = \cos^{-1} \left(\frac{B_i C_i \pm A_i \sqrt{A_i^2 + B_i^2 - C_i^2}}{A_i^2 + B_i^2} \right)$$

多级超导电缆弯曲刚度分析



ITER超导磁体系统中的四种线圈及截面示意图

弯曲变形是超导电缆使役环境中的主要变形之一。

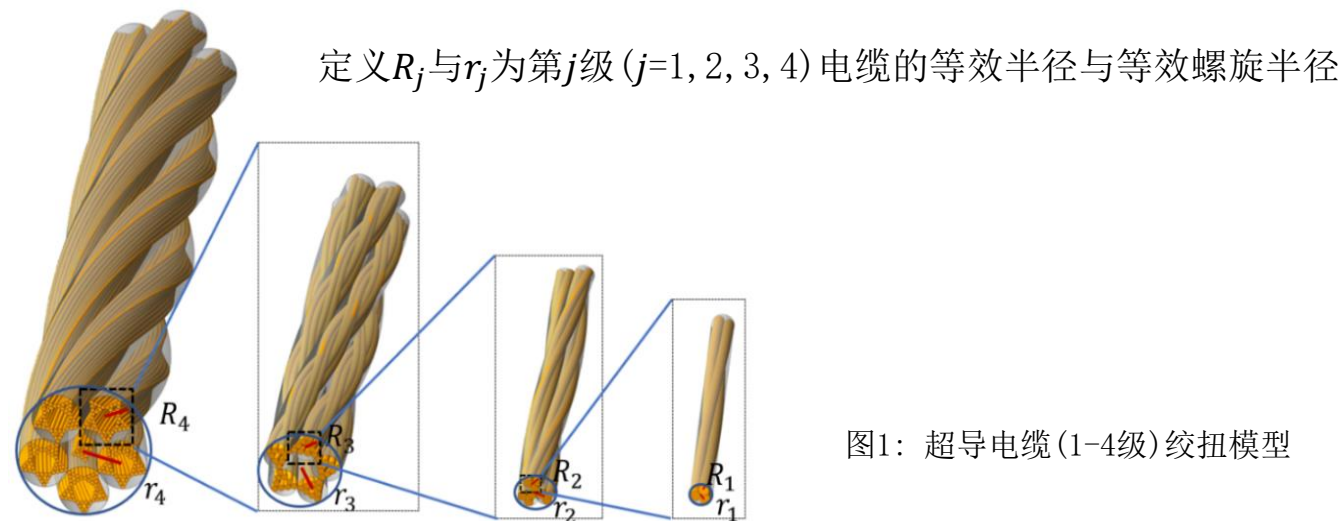


图1: 超导电缆(1-4级)绞扭模型

三根半径为 R_1 的股线通过螺旋半径 r_1 缠绕成一级电缆， R_1 与 r_1 的关系为：

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2R_1 = r_1$$

三根半径为 R_2 的股线通过螺旋半径 r_2 缠绕成二级电缆，此时：

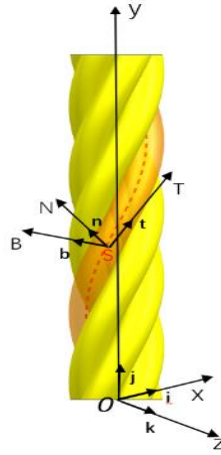
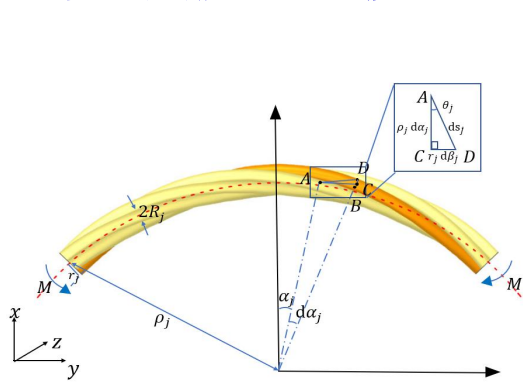
$$\sqrt{3}R_1 = R_2, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2R_2 = r_2$$

以此类推，得到三级电缆和四级电缆的等效半径和等效螺旋半径。

超导电缆研究——CICC多级超导电缆弯曲性质研究



弯曲刚度理论模型



在单根股线上取S点处建立局部右手Frenet坐标系(T, N, B)

第 j 级电缆受纯弯曲作用下的电缆中心线满足：

$$\mathbf{R}(S) = \rho_j \cos \alpha_j \mathbf{i} + \rho_j \sin \alpha_j \mathbf{j}$$

曲率半径 ρ_j 定义为：

$$\rho_j = \frac{dS}{d\alpha_j}$$

以一级电缆为例，一级电缆中第 i 根股线的坐标方程 ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s; i) &= [\rho - r \cos(\beta + 2\pi i / n)] \cos \alpha \mathbf{i} \\ &+ [\rho - r \cos(\beta + 2\pi i / n)] \sin \alpha \mathbf{j} \\ &+ r \sin(\beta + 2\pi i / n) \mathbf{k} \end{aligned}$$

此时，第 j 级电缆的弯曲刚度可以表示为：

$$s_j^B = M_j \rho_j$$

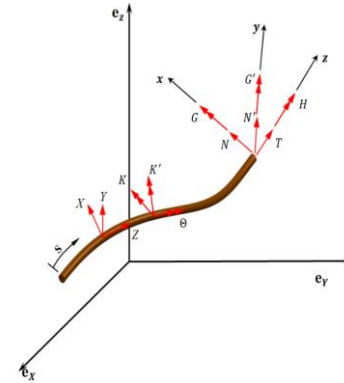
ρ_j 为受纯弯曲变形后电缆的曲率半径， M_j 为该曲率半径对应的所需弯矩大小。

取第 j 级电缆的一个绞距进行分析，其弯矩 M_j 可以表示为：

$$M_j = E_j^e I_j \kappa_j$$

$I_j = \frac{\pi R_j^4}{4}$ 表示股线的惯性矩， E_j^e 为等效弹性模量， κ_j 为该电缆上的曲率。

各级电缆等效弹性模量



单根股线在空间上的受力示意图

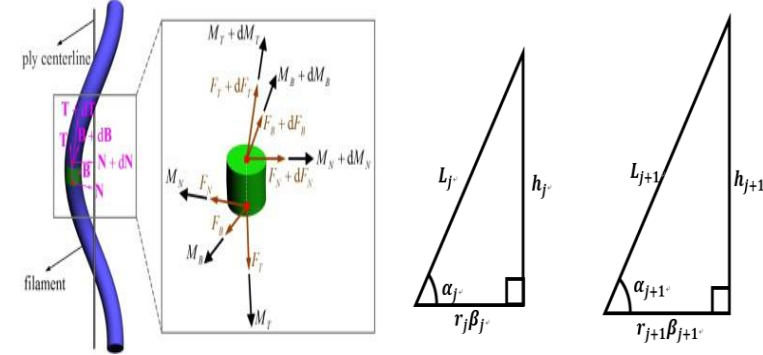
平衡方程：

$$\begin{aligned} -N'\tau + T\kappa' + X &= 0 \\ -G'\tau + H\kappa' - N' &= 0 \\ Y = Z = N = \theta &= 0 \end{aligned}$$

本构方程：

$$\begin{aligned} \frac{G'}{E_{j-1}R_j^3} &= \frac{\pi}{4} R_j \Delta\kappa' \\ \frac{H}{E_{j-1}R_j^3} &= \frac{\pi}{4(1+\nu)} R_j \Delta\tau \\ \frac{T}{E_{j-1}R_j^2} &= \pi \xi_{j-1} \end{aligned}$$

$$\frac{N'}{E_{j-1}R_j^2} = \frac{H}{E_{j-1}R_j^3} \frac{\cos^3 \alpha_j}{r_j/R_j} - \frac{G'}{E_{j-1}R_j^3} \frac{\sin \alpha_j \cos \alpha_j}{r_j/R_j}$$



单根股线受外部载荷作用时，在空间上的受力示意图(左)，多级电缆绞扭前后结构变化示意图(右)

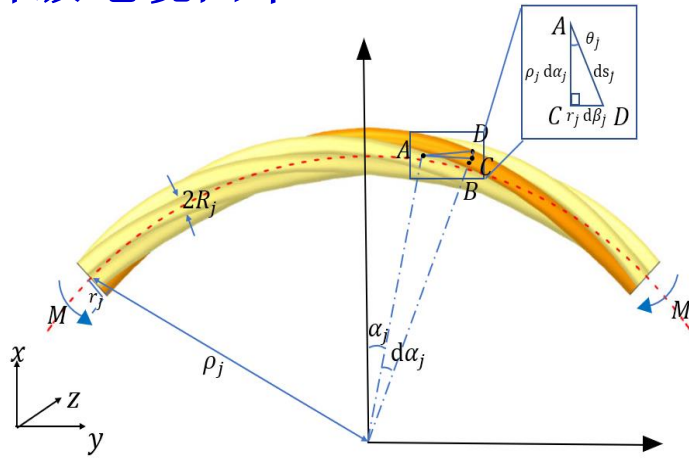
总的轴向力：

$$\frac{F}{E_{j-1}R_j^2} = n \left[\frac{T}{E_{j-1}R_j^2} \sin^2 \alpha_j + \right]$$

超导电缆研究——CICC多级超导电缆弯曲性质研究



各级电缆曲率



多级电缆(1-4级)弯曲刚度理论模型

投影其他分量的曲率到z轴上，电缆的平均曲率可以表示为：

$$\langle \kappa_z |_{\alpha=0} \rangle_j = \left\langle \sum_{i=0}^n (k_i b_i \cdot k) \right|_{\alpha=0} \rangle_j = \left(\frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\kappa b \cdot k)_{\alpha=0} d\beta \right)_j$$

第 j 级电缆中的单根股线在 $\alpha = 0$ 处截面的曲率投影为：

$$((\kappa b \cdot k)_{\alpha=0})_j = \frac{r_j^2(1 - \lambda_j^2)\cos^2\beta_j - \rho_j r_j(2 + \lambda_j^2)\cos\beta_j + \rho_j^2 + 2r_j^2\lambda_j^2}{[(\rho_j - r_j \cos\beta_j)^2 + \rho_j^2 \tan^2\theta_j]^{3/2}}$$

其中：

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \lambda_j = \frac{\rho_j}{r_j} \tan\theta_j$$

投影多级电缆上每根股线的曲率到z轴，通过对一个绞距内多根股线曲率投影积分，将电缆平均曲率 $\langle \kappa_z |_{\alpha=0} \rangle_j$ 表示为有关曲率半径 ρ_j 的表达式。

多级电缆弯曲刚度理论分析

第 j 级电缆在 ρ_j 曲率半径下的弯矩 $\langle M_z \rangle_j$ 可以表示为：

$$\langle M_z \rangle_j = \frac{n}{2\pi} E_{e,j} I_j \int_0^{2\pi} \frac{r_j^2(1 - \lambda_j^2)\cos^2\beta_j - \rho_j r_j(2 + \lambda_j^2)\cos\beta_j + \rho_j^2 + 2r_j^2\lambda_j^2}{[(\rho_j - r_j \cos\beta_j)^2 + \rho_j^2 \tan^2\theta_j]^{3/2}} d\beta_j$$

第 j 级电缆的弯曲刚度 s_j^B 可以表示为：

$$s_j^B = \langle M_z \rangle_j \rho_j = \frac{n\rho_j}{2\pi} \frac{E_j \sum \pi R_i^2}{\pi (R_j + r_j)^2} \frac{\pi R_j^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{r_j^2(1 - \lambda_j^2)\cos^2\beta_j - \rho_j r_j(2 + \lambda_j^2)\cos\beta_j + \rho_j^2 + 2r_j^2\lambda_j^2}{[(\rho_j - r_j \cos\beta_j)^2 + \rho_j^2 \tan^2\theta_j]^{3/2}} d\beta_j$$

其中： ρ_j 为多级超导电缆在纯弯曲变形下的曲率半径， $\langle M_z \rangle_j$ 为该曲率半径下的超导电缆所受弯矩。

将多级超导电缆进行简化，结合多级超导电缆等效弹性模量的求解方法，并利用多级超导电缆在纯弯曲变形时的曲率半径推导出其所受弯矩的公式，以此得出其在纯弯曲变形中的弯曲刚度理论值。

超导电缆研究——CICC多级超导电缆弯曲性质研究



多级电缆弯曲刚度理论分析

Table A.2. Salient parameters of ITER cables.

Parameter	TF	CSIO	CSJA	PF			CC	MB	CB
				L1 (1 and 6)	L2 (2-4)	L3 (5)			
SC strand type	TF	CSIO	CSJA	S1	S2	S2	S2	S2	S2
Segregated copper				N/a			N/a		
Strand (Cu)	0.820 mm	0.820 mm	0.830 mm	—	0.730 mm	N/a	—	0.730 mm	0.730 mm
Core 1 (C1)	(3 × 4 Cu)	N/a	N/a	—	1.200 mm	N/a	—	(3 × 4Cu)	N/a
Core 2 (C2)	N/a	N/a	N/a	—	2.700 mm	N/a	—	2.0 mm	N/a
Core 3 (C3)	N/a	N/a	N/a	—	N/a	2.850 mm	—	1 + 6 + 12 + 18 + 24 rope with C2	N/a
Petal wrap (mm)							N/a		
Thick. × width	0.1 × (12-15) ^a	0.10 × (12-15) ^a	0.08 × (15-20) ^a	0.05 × 20	0.05 × 20	0.05 × 20	—	N/a	N/a
Coverage (%)	50	70	70	50	50	50	—	—	—
Cable wrap (mm)									
Thick. × width	0.1 × 40	0.08 × 32	0.08 × 32	0.1 × 40	0.1 × 40	0.1 × 40	0.1 × 40	0.1 × 40	0.1 × 20
Overlap (%)	40	40	40	40	40	40	40	40	40
Central spiral (mm)							N/a	N/a	
Thick. × width	1 × 6	1 × 6	1 × 6	1 × 6	1 × 6	1 × 6	—	—	0.5 × 6
Out. dia. × pitch	10 × 9.0	10 × 9.0	9 × 8.85	12 × 8.85	12 × 8.85	12 × 8.85	—	—	6 × 9.9
Petal layout	(2 SC + 1 Cu) × 3 × 5 × 5 + 1 C1	(2 SC + 1 Cu) × 3 × 4 × 4	(2 SC + 1 Cu) × 3 × 4 × 4	3 SC × 4 × 4 × 5	[(2 SC + 1 Cu) × 3 × 4 + 1 C1] × 5 + 1 C2	(3 SC × 4 × 4 × 4) + 1 C3	3 SC × 4 × 5	(2 SC + 1 Cu) × 3 × 5 × (5 + 1 C1)	(2 SC + 1 Cu) × 3 × 3 × 3
Final cable layout	6 petals around spiral	6 petals around spiral	6 petals around spiral	6 petals around spiral	6 petals around spiral	6 petals around spiral	5 petals twisted	6 petals around C3	4 petals around spiral
Twist pitches (mm)									
First stage	80	20	20	45	45	45	45	45	42
Second stage	140	45	45	85	85	85	85	85	70
Third stage	190	80	80	145	145	145	145	145	122
Fourth stage	300	150	150	250	250	250	N/a	250	182
Final stage	420	450	450	450	450	450	250	450	250

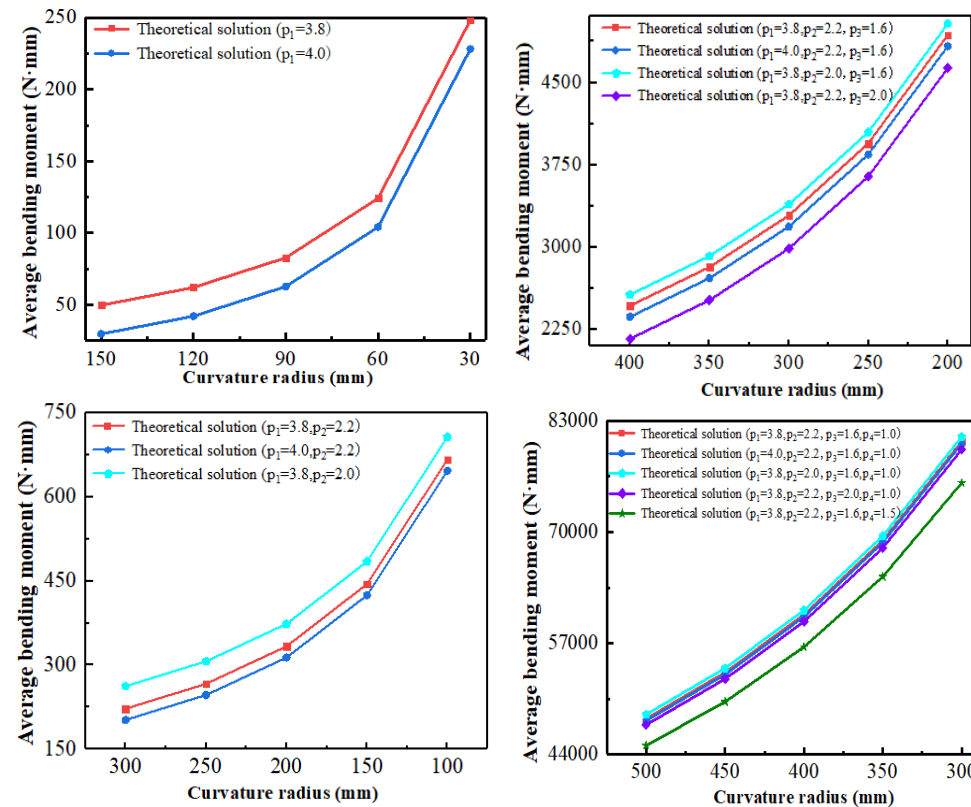
^a Depending upon supplier.

绞距/mm: 80-140-190-300



绞距数/个: 3.8-2.2-1.6-1

Devred, 2014, Supercond. Sci. Technol.



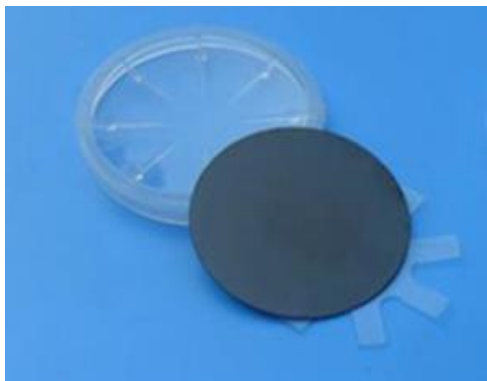
各级电缆曲率半径与其所受弯矩关系示意图

基于多级电缆在纯弯曲变形下的弯曲刚度推导理论，对比了不同绞距的各级电缆曲率半径与所受弯矩关系。

高温超导薄膜应力测量



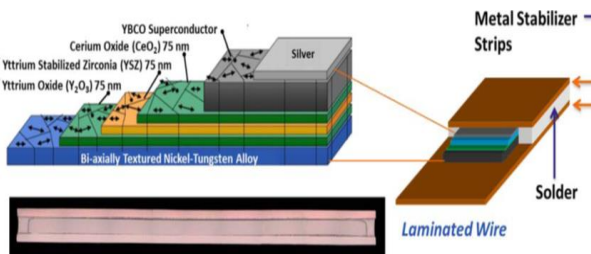
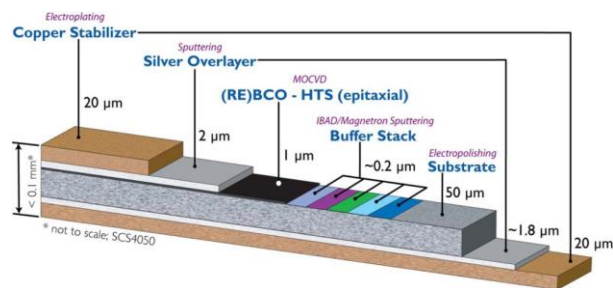
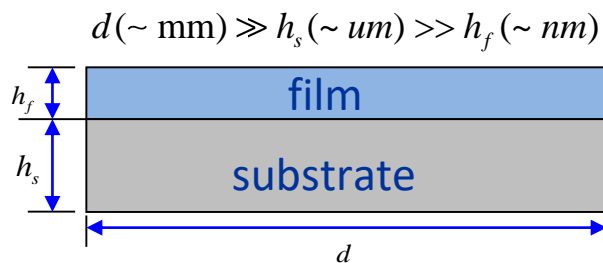
高温超导材料薄层结构



Thin HTS film



2G HTS tapes



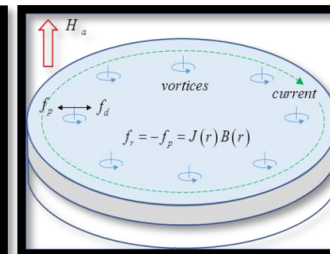
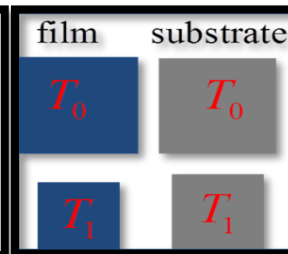
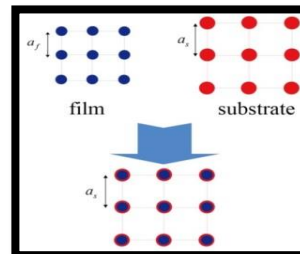
高温超导薄膜中面临的力学问题

加工制造

- 薄膜沉积

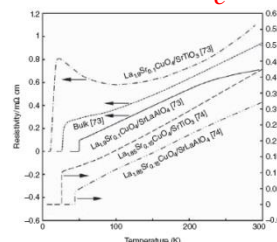
极端工作环境

- 极低温 (4.2K-77K)
- 强磁场 (>1T)
- 大电流 (>100A)



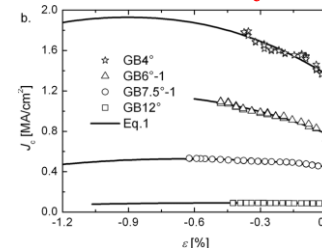
高温超导薄膜

改变 T_c



ISBN : 9781119978817

改变 J_c



Phys. Rev.Lett. **103**, (2009)027005

如何测量
薄膜应力?

高温超导薄膜应力测量

高温超导薄膜应力测试计算方法

本构模型:

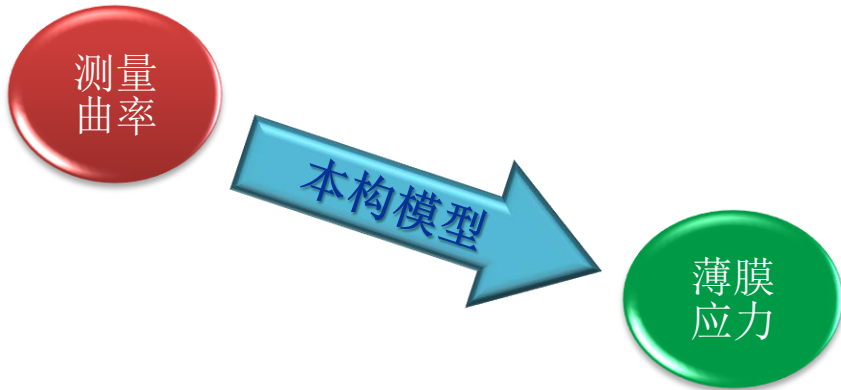
◆ Stony 公式

$$\sigma^{(f)} = \frac{E_s h_s^2 \kappa}{6h_f (1-\nu_s)} \quad \text{G.G. Stony . 1909}$$

◆ 基于Stony框架
拓展理论

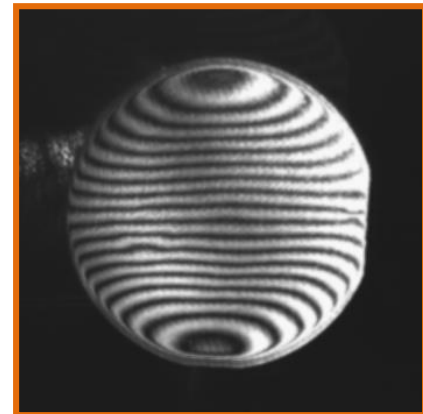
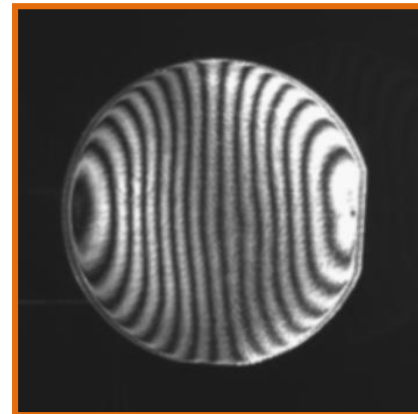
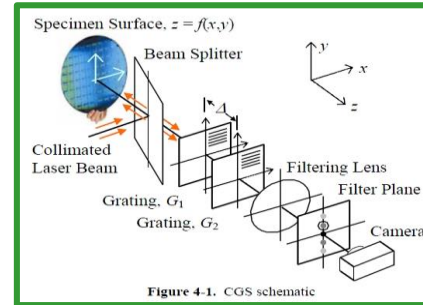
$$\sigma_{ij}^{(T)}(\mathbf{r}) = f[\kappa_{ij}(\mathbf{r})] \quad \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{r}) = f[\kappa_{ij}(\mathbf{r})]$$

Huang YG .et al, 2005~2007

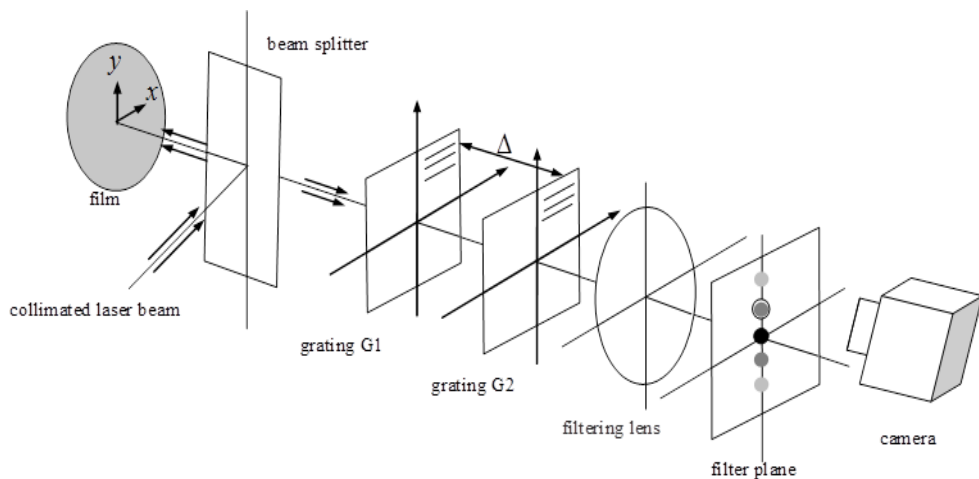


曲率测量技术:

- ◆ 光栅法
- ◆ 激光扫描法
- ◆ CGS



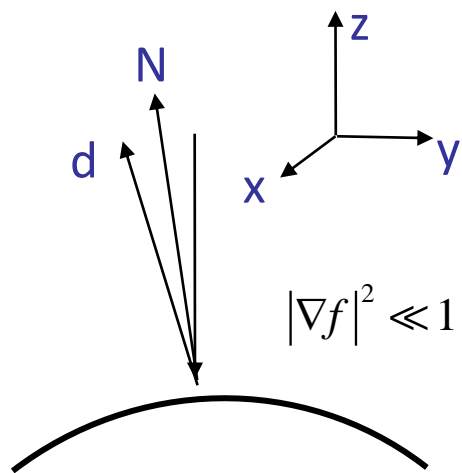
高温超导薄膜应力测量——CGS系统



$$E_{(1,0)} = a_1 \exp\left[i\left(k\left(\frac{\Delta}{\gamma \cos \theta} + \beta \sin \theta\right) + k\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{x}\right)\right]$$

$$E_{(0,1)} = a_0 \exp\left[i\left(k\left(\frac{\Delta}{\gamma}\right) + k\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{x}\right)\right]$$

干涉条纹: $I = I_c + \varepsilon\mu a_0 a_1 \cos\left(\frac{k\Delta\beta\theta}{\gamma^2}\right)$



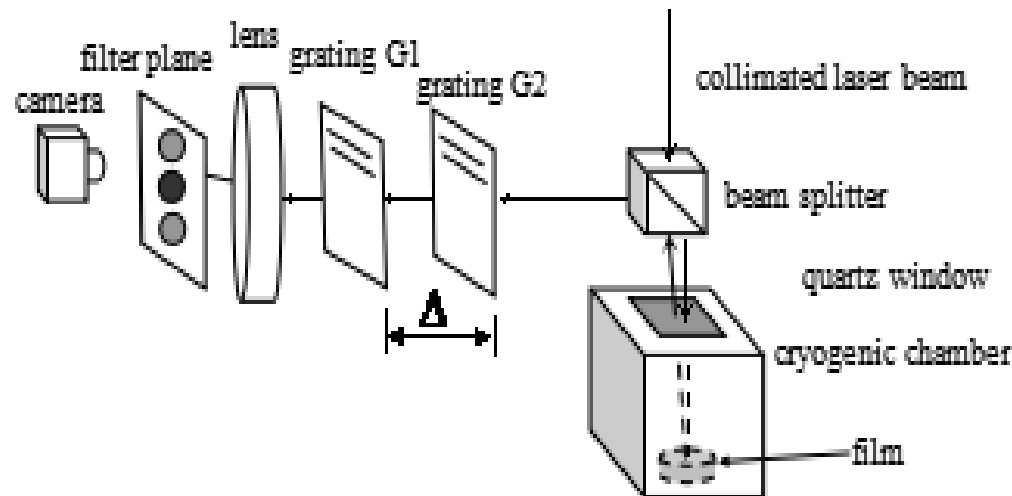
反射光: $\mathbf{d} = (2\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} - \mathbf{e}_z = \alpha\mathbf{e}_x + \beta\mathbf{e}_y + \gamma\mathbf{e}_z = \frac{2(-f_x\mathbf{e}_x - f_y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)}{1 + f_x^2 + f_y^2} - \mathbf{e}_z$

小变形时曲率与条纹级数的关系。

$$k_{xx} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{p}{2\Delta} \left(\frac{\partial n^{(x)}}{\partial x}\right) \quad k_{yy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{p}{2\Delta} \left(\frac{\partial n^{(y)}}{\partial y}\right)$$

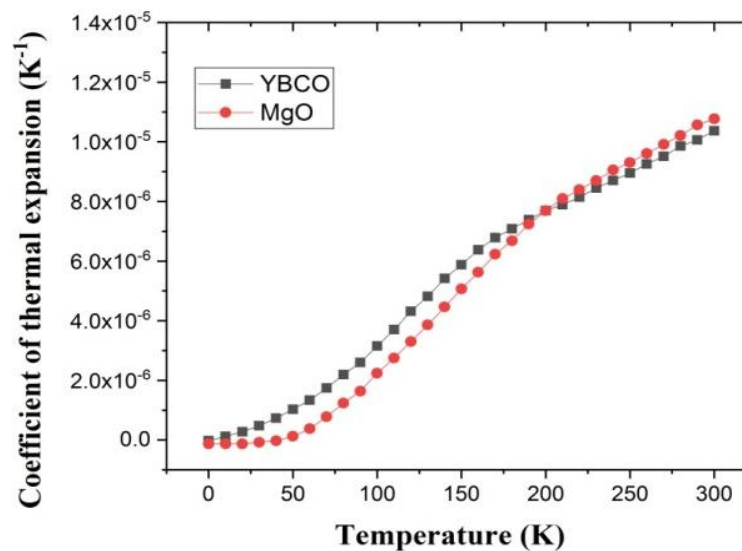
$$k_{xy} \approx \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \approx \frac{p}{2\Delta} \left(\frac{\partial n^{(x)}}{\partial y}\right) = \frac{p}{2\Delta} \left(\frac{\partial n^{(y)}}{\partial x}\right) \quad n = \pm 1, 2, 3, \dots$$

高温超导薄膜应力测量——薄膜热应力研究

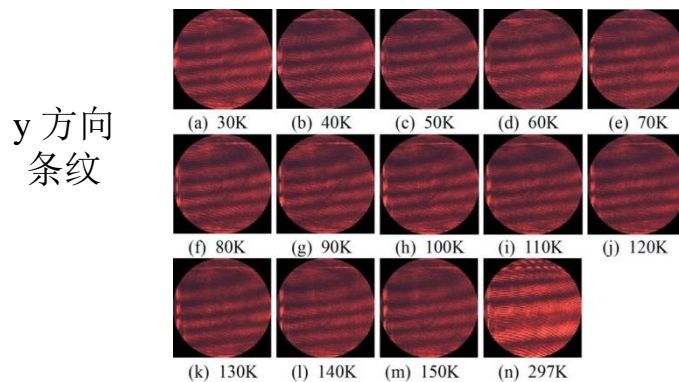
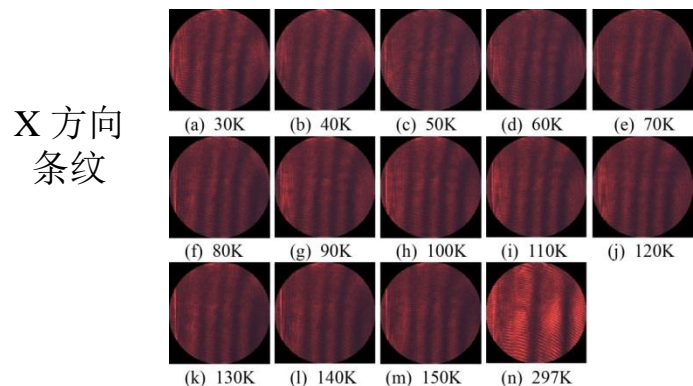


实验参数：
YBCO膜厚度：200nm
MgO基底厚度：500um
光栅参数：50line/mm
光栅间距：21mm
GM制冷机控制冷却温度变化范围：30K-150K

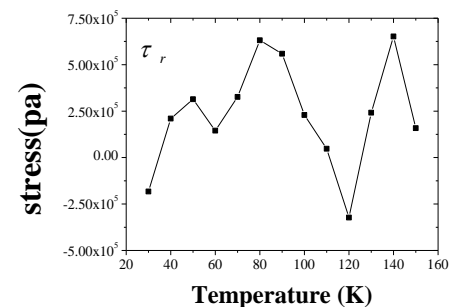
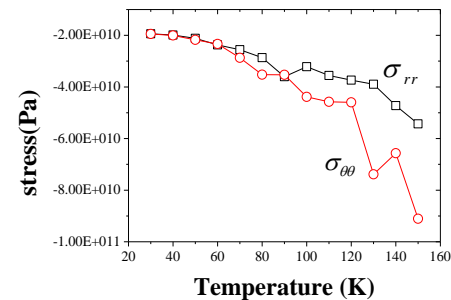
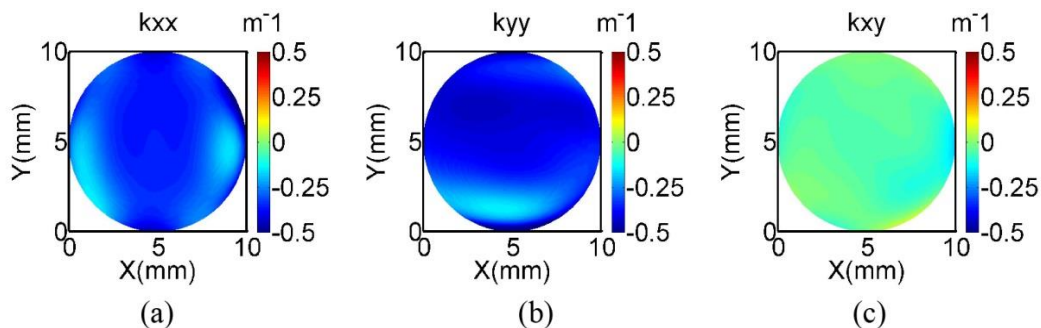
材料参数：
 $E_f = 123Gpa$
 $E_s = 248Gpa$
 $\nu_f = 0.245$
 $\nu_s = 0.251$



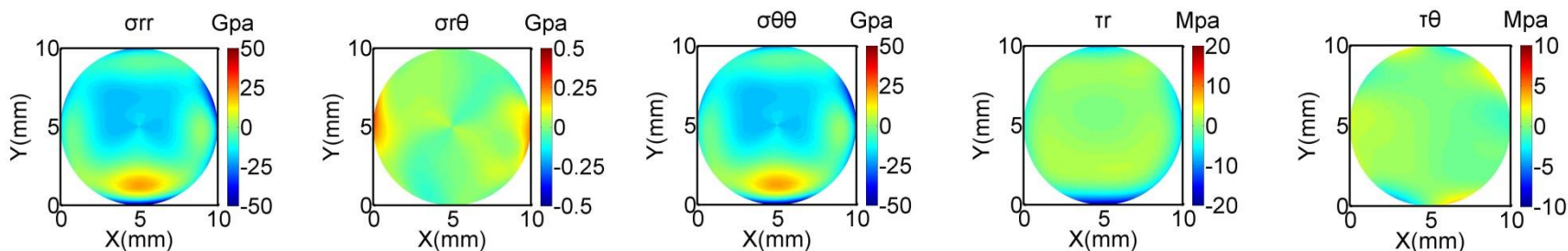
高温超导薄膜应力测量——薄膜热应力研究



T=30K时
曲率Kxx, Kyy
扭率Kxy

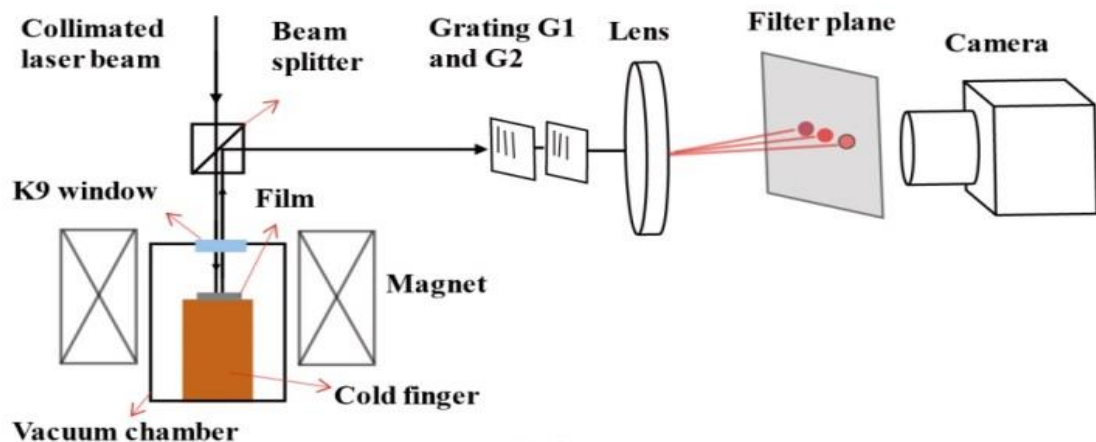


中心点应力随温度的变化

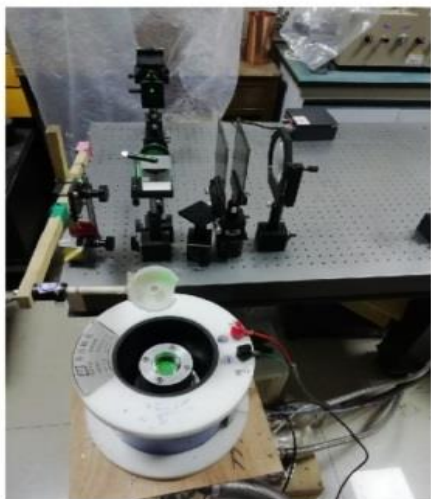


薄膜应力场分布

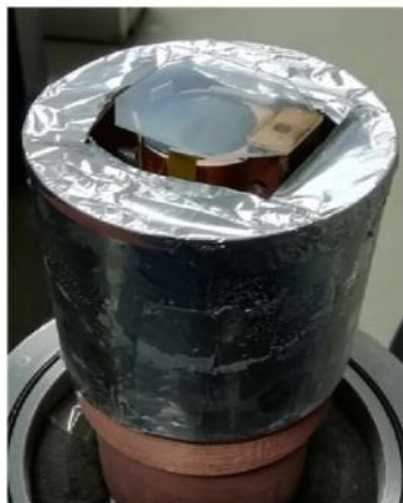
高温超导薄膜应力测量——薄膜磁化过程应力研究



(a)



(b)



(c)

实验参数:

YBCO膜厚度: 500nm

STO基底厚度: 500um

光栅参数: 50mm/line

光栅间距: 41mm

GM制冷机控制冷却温度: 30K

样品温度: ~69K

垂直磁场: 0-112mT

材料参数:

$$E_f = 123 \text{Gpa}$$

$$E_s = 213 \text{Gpa}$$

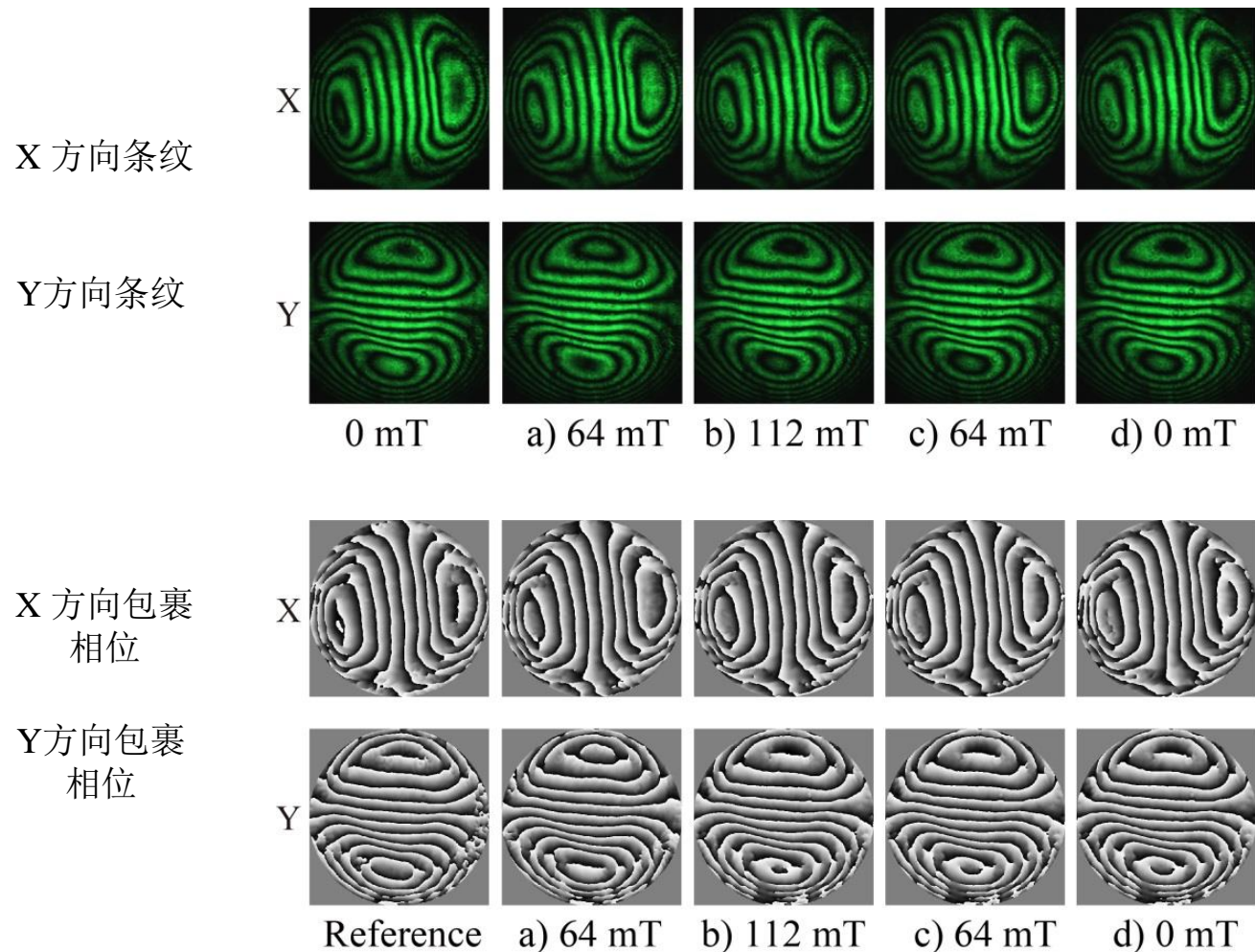
$$\nu_f = 0.245$$

$$\nu_s = 0.297$$

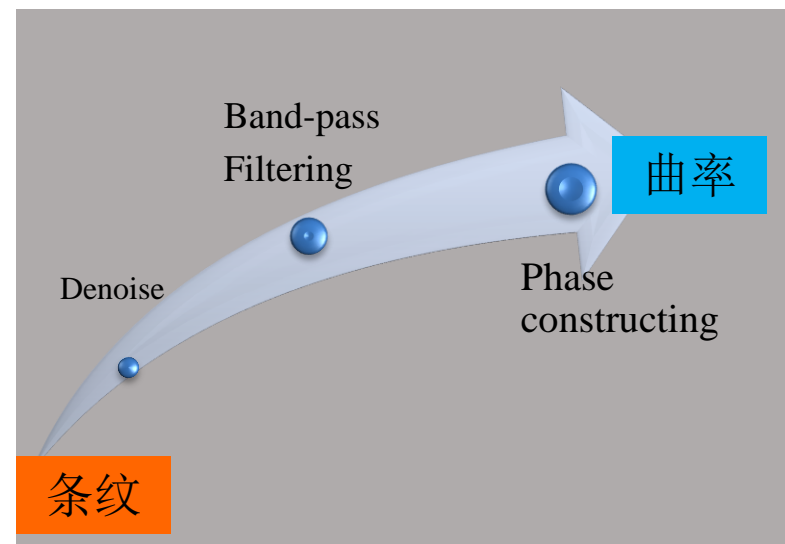
高温超导薄膜应力测量——薄膜磁化过程应力研究



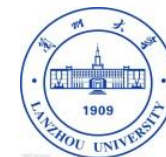
测量和计算结果



数据处理流程

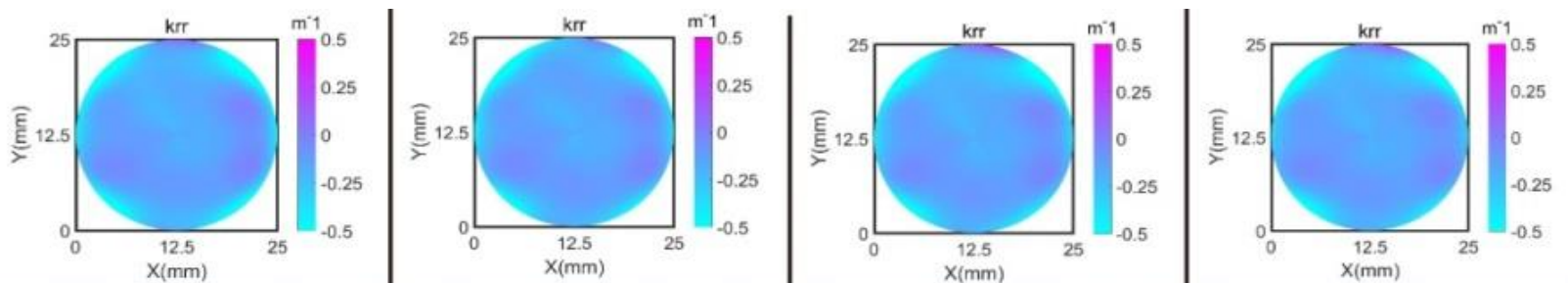


高温超导薄膜应力测量——薄膜磁化过程应力研究

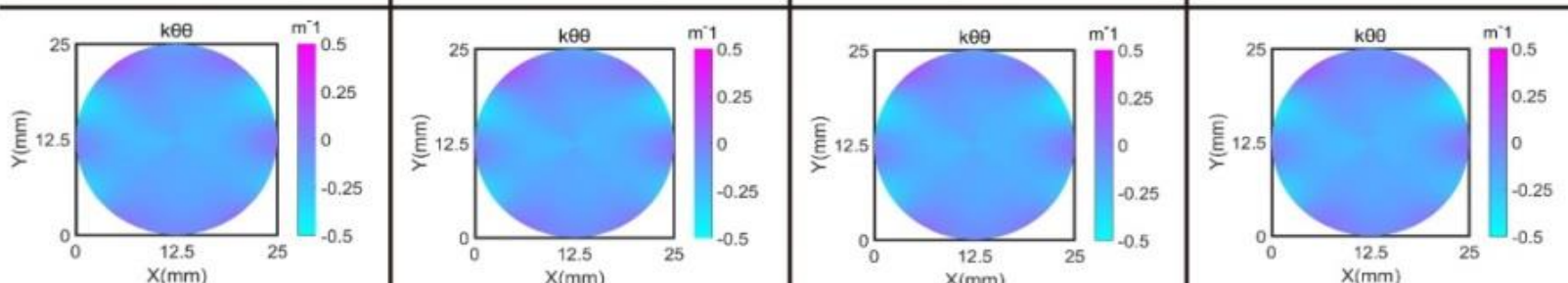


加磁与卸磁过程中不同磁场下曲率云图

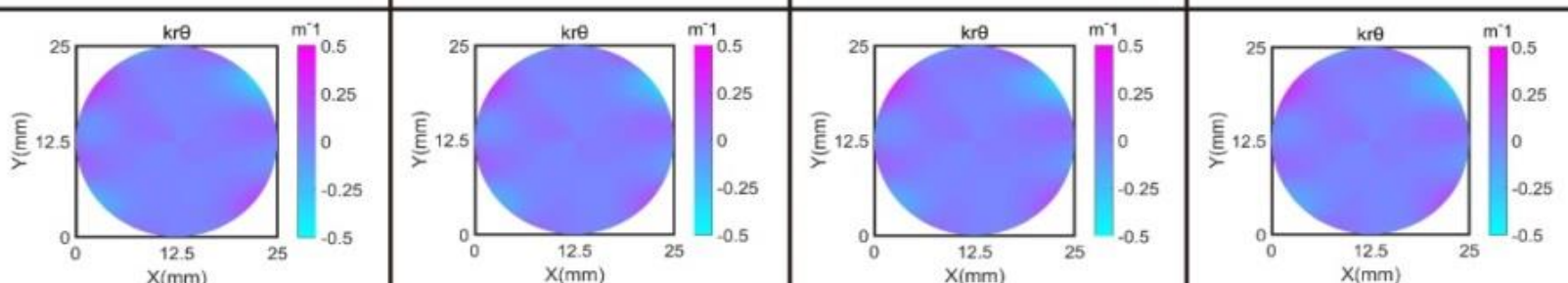
k_{rr}



$k_{\theta\theta}$



$k_{r\theta}$



a) 64 mT

b) 112 mT

c) 64 mT

d) 0 mT

高温超导薄膜应力测量——薄膜磁化过程应力研究



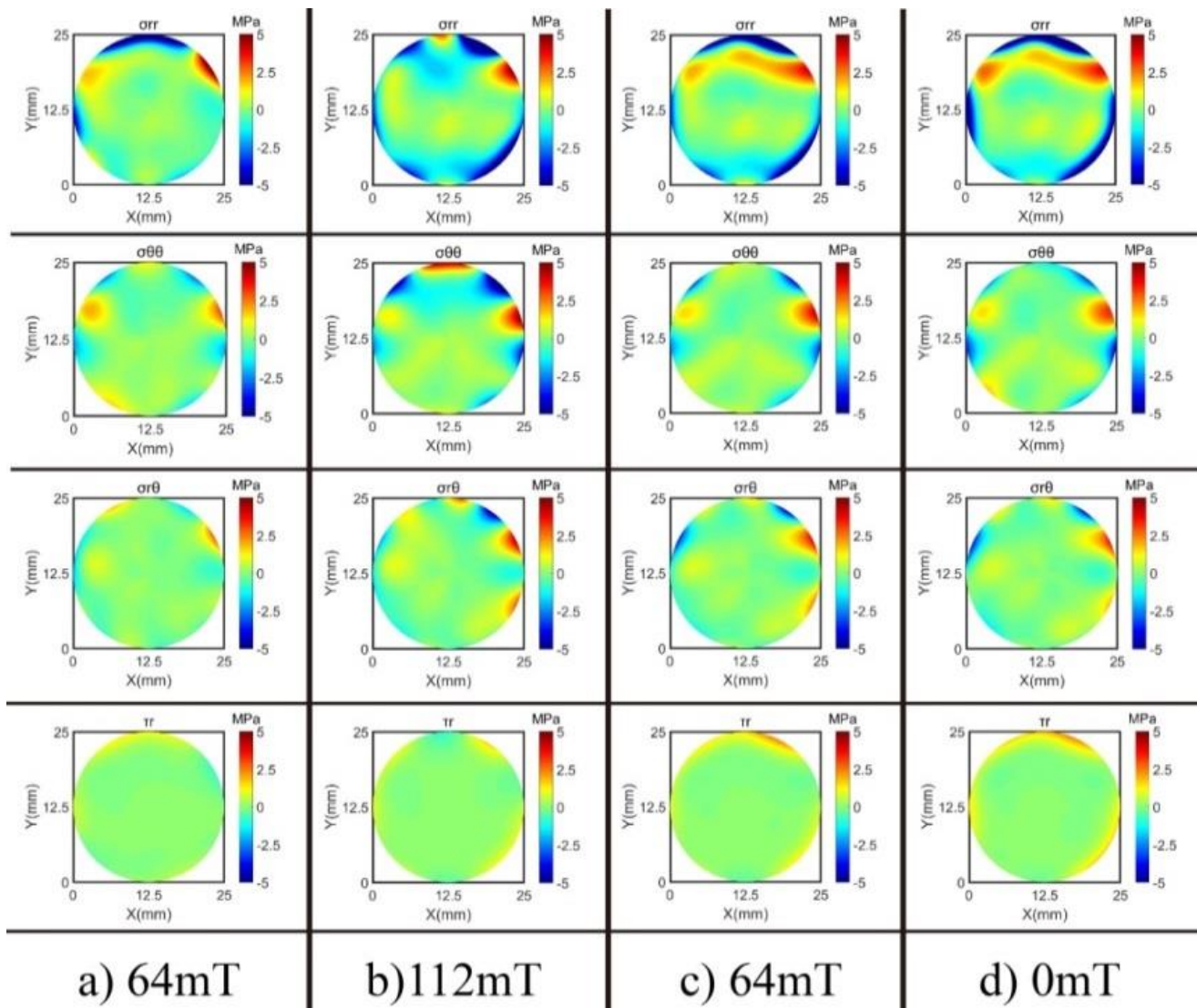
加磁与卸磁过程中不同磁场下应力云图

σ_{rr}

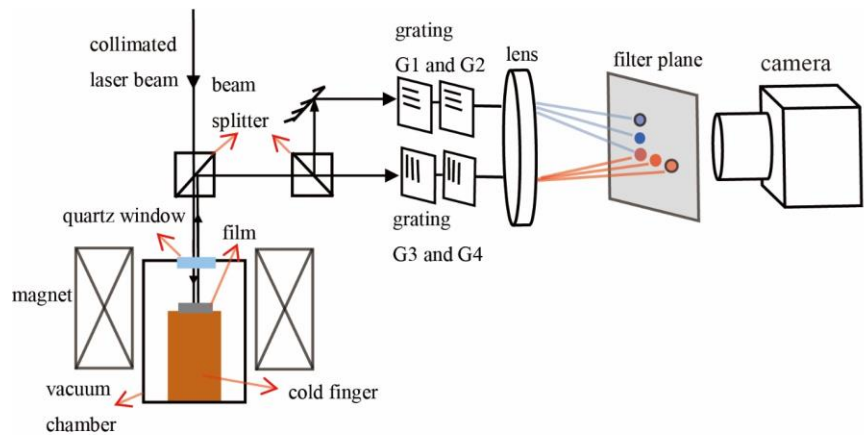
$\sigma_{\theta\theta}$

$\sigma_{r\theta}$

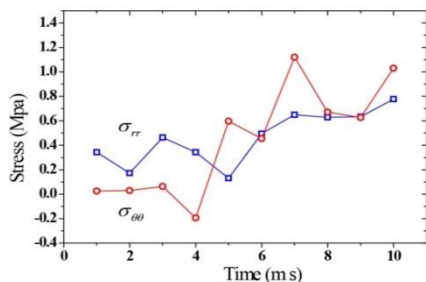
τ_r



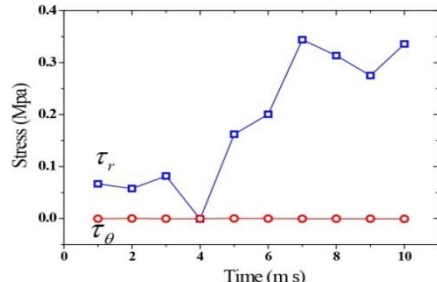
高温超导薄膜应力测量——薄膜在脉冲磁场下的应力



(a)



(a)

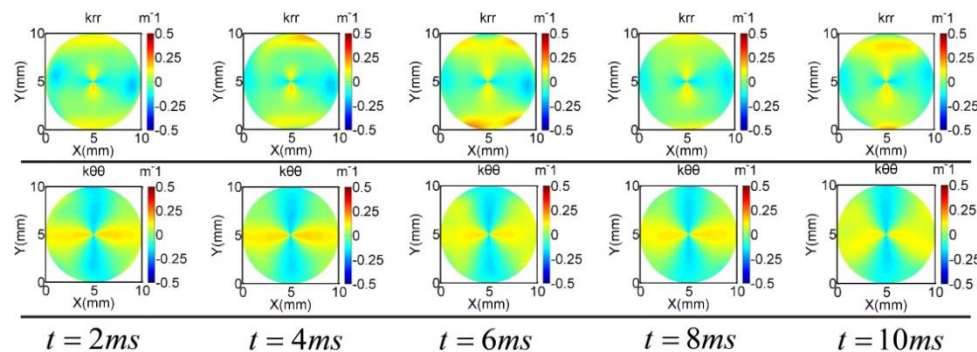
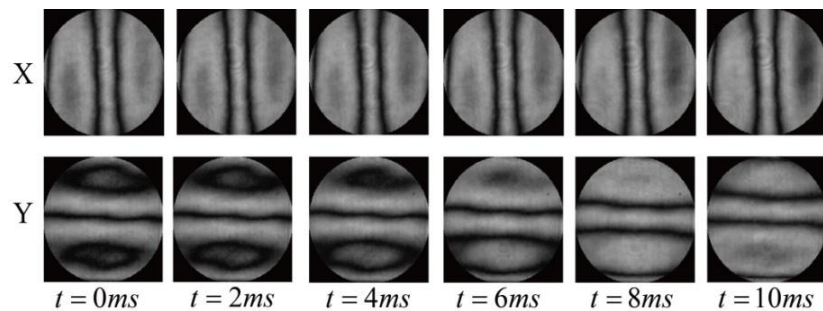


(b)

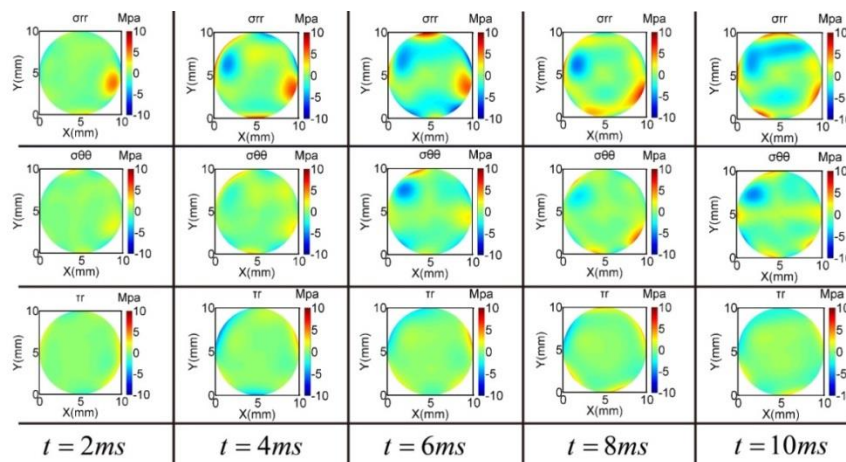


(b)

曲率分量



应力分量



➤ 稳定悬浮机理和技术进展

悬浮是指物体克服地心引力且不与周围其他物体接触的稳定或随机平衡的状态；

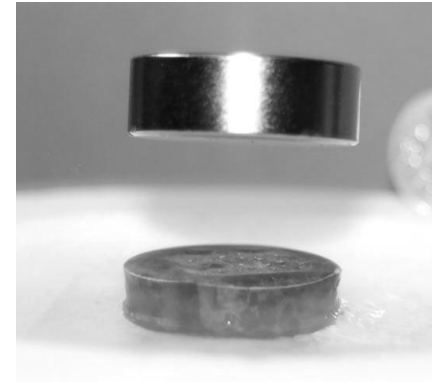
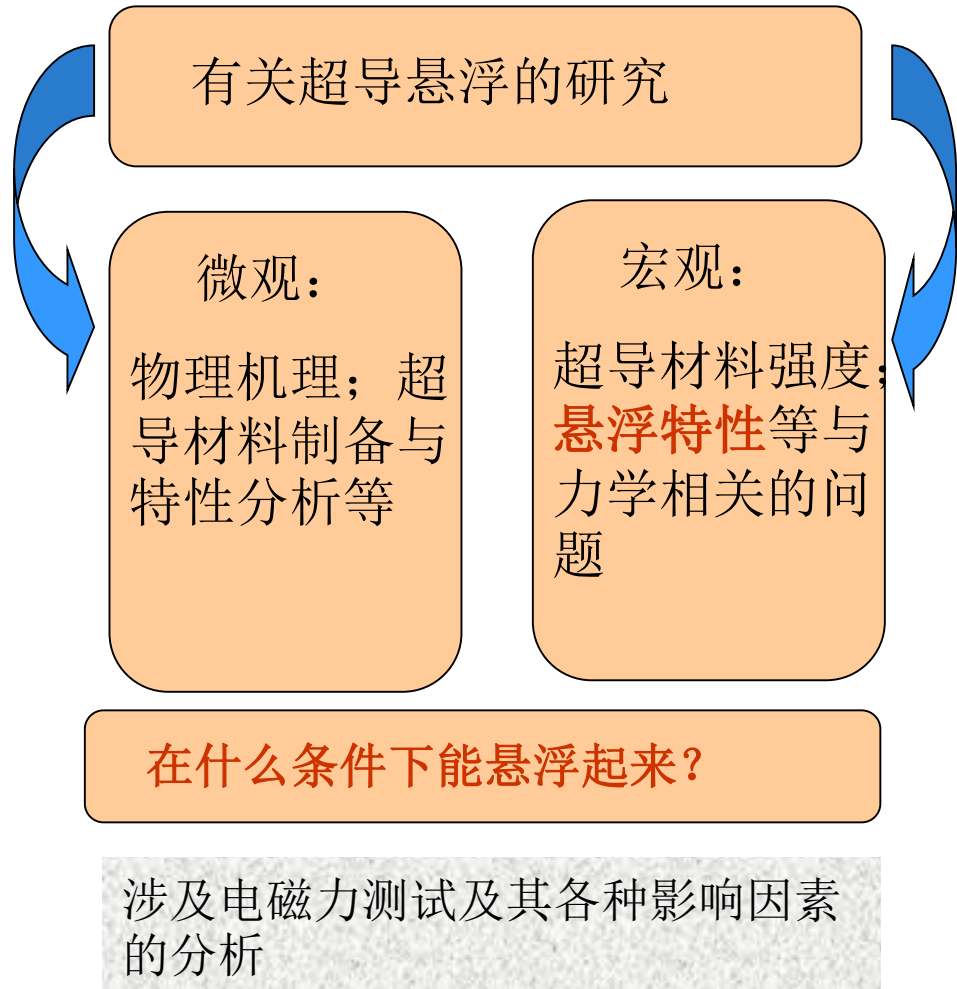
按照悬浮的物理原理可将其分为：气悬浮、声悬浮、光悬浮和电磁悬浮等。



其中光悬浮和声悬浮仅局限于悬浮质量小的物体，气悬浮和电磁悬浮是工程应用的主要备选方式；

电磁悬浮是目前认为最有效的悬浮方式。已有常导型(EMS)和超导型(EDS)悬浮列车以及混合EMS悬浮系统，德、美、日、中均存在商业化的电磁悬浮列车运行。

有关高温超导悬浮的基本问题



Upper:
Permanent magnet

Lower:
Superconductor



相辅相成

悬浮后的行为特征如何？

主要涉及系统在外界干扰或持续激励下的悬浮漂移

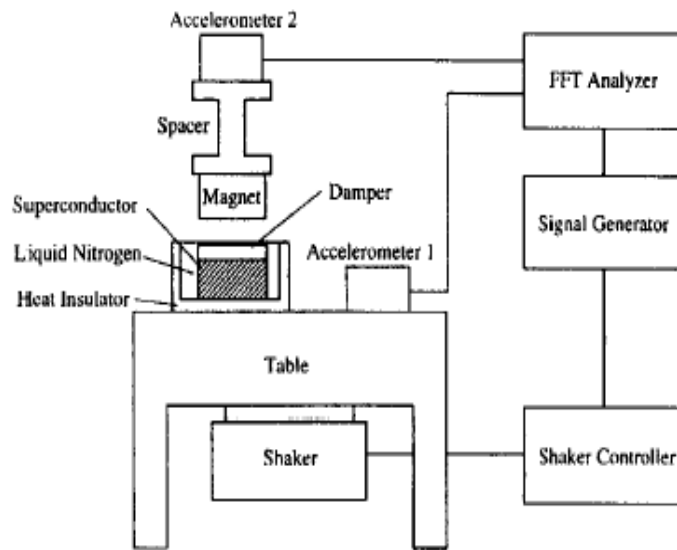
➤ 稳定悬浮机理和技术进展

静态电磁力测试装置

主要特征：(1) 悬浮力和导向力隔离测试；(2) 悬浮力弛豫测试

动态电磁力测试装置

主要特征：(1) 悬浮力和悬浮高度漂移测试；(2) 混沌振动；(3) 垂向、水平振动、阻尼器



Teshima, Physica C, (1996,1997), Jpn.J. Appl. Phys.,(1997)



研制小组	测试对象	常用间距(mm)	速度(mm/s)	功能
美国Cornell大学	永磁对超导体	10	0.005-0.1	悬浮力和水平力隔离测试, 动态特性测试
挪威Oslo大学	永磁对超导体	20	0.0025(单位mm/step)	悬浮力和水平同步测试
陕西师范大学	永磁对超导体	3-180	0.1-20	相互作用力以及磁场的三维测试
西南交通大学(SCML-01)	永磁体(轨道)对超导体	50-140	1-2	悬浮力导向力隔离测试, 三维磁场扫描
西南交通大学(SCML-02)	永磁体(轨道)对超导体	5-50	0.01-20	力同步测试、弛豫同步测试

➤ 高温超导系统悬浮力和导向力测试

永磁体温度对悬浮系统悬浮力的影响

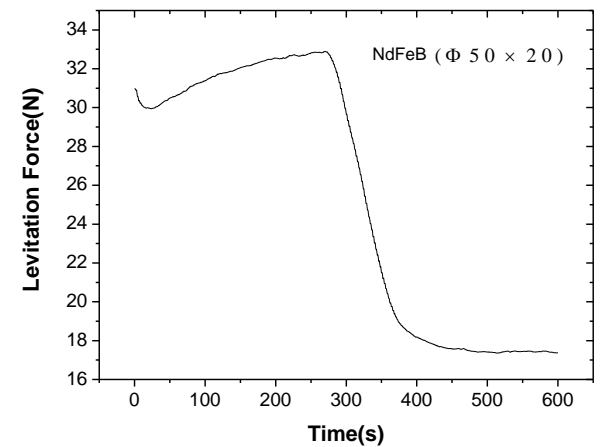
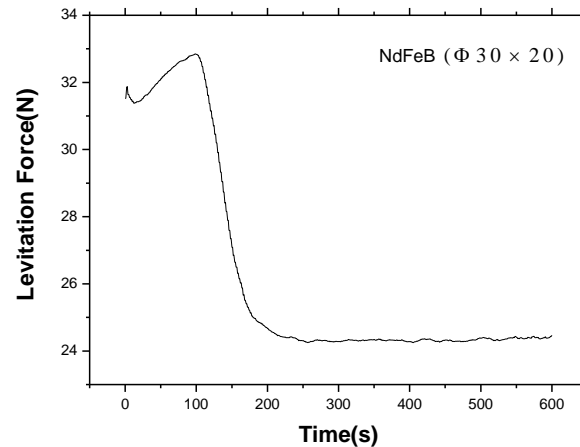
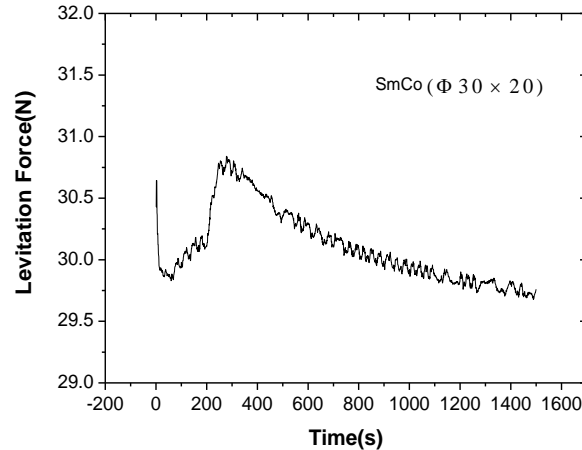
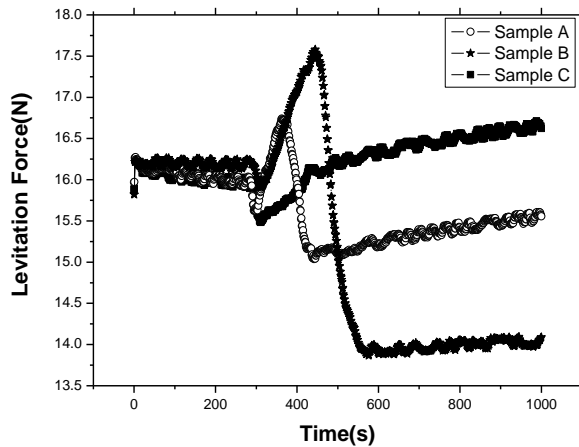
☞ Durst and Kronmuller, *J. Mag. Mag. Mater.*, (1987), 温度降低, NdFeB永磁体剩余磁化强度增加;

☞ Hull and Cansiz, *J. Appl. Phys.*, (1999), NdFeB永磁温度降低1K, 剩余磁化强度增加1.9mT, 悬浮力改变约0.4%;

☞ 通过绕制电阻丝抑制永磁体温度降低, 对于小尺寸材料适用, 但是不适用大尺寸永磁, 且绕制匝数越多, 对永磁体磁场影响越大。

高温超导系统悬浮力和导向力测试

永磁体温度对悬浮系统悬浮力的影响

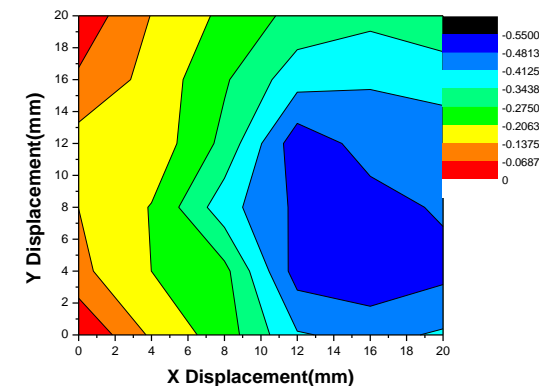
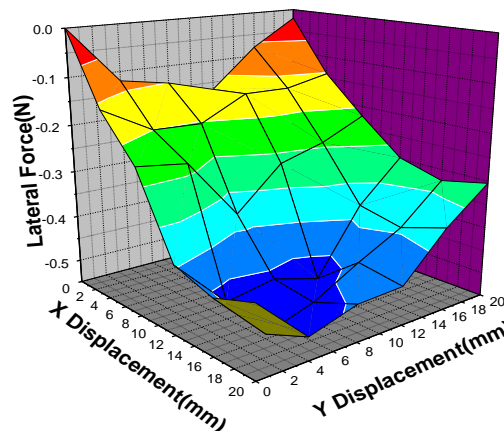
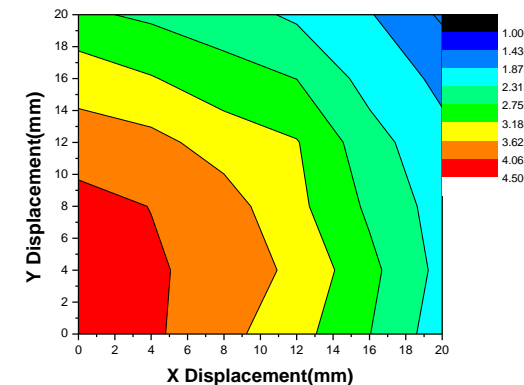
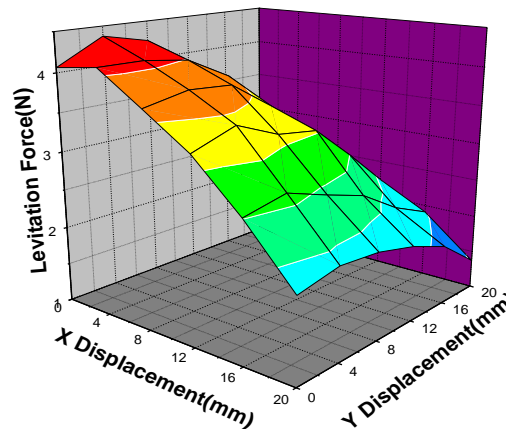


- 永磁体温度改变对系统悬浮力存在较为显著的影响。其中SmCo永磁体温度改变引起的悬浮力变化最大不超过5%，而NdFeB永磁体(直径30mm，厚度20 mm)悬浮力改变25%左右，尺寸较大NdFeB(直径50mm，厚度20mm)悬浮力的改变最大可超过45%；
- 随着冷却过程的深入，NdFeB永磁体剩余磁化强度存在一个先减小、增大、再迅速降低、最后趋于平衡的过程；而SmCo永磁体没有迅速降低的过程；
- 本文使用NdFeB永磁材料(直径30mm)在液氮中温度改变时间不超过10分钟；为后续实验中消除永磁体温度改变对悬浮力的影响找到了途径。

➤ 悬浮力、导向力三维测试

☞ 具有钙钛矿结构特征的高温超导体具有高度的各向异性,普遍做法将其划分为层状结构进行分析,郑、苟等都采用片状结构特征数值计算悬浮力,得到了与实验近似的结果。但是 ab 面内仍存在各向异性。

☞ 永磁体磁场分布呈现三维特征, Gou *et al.*, *Appl. Math. Meth.*, (2004)。

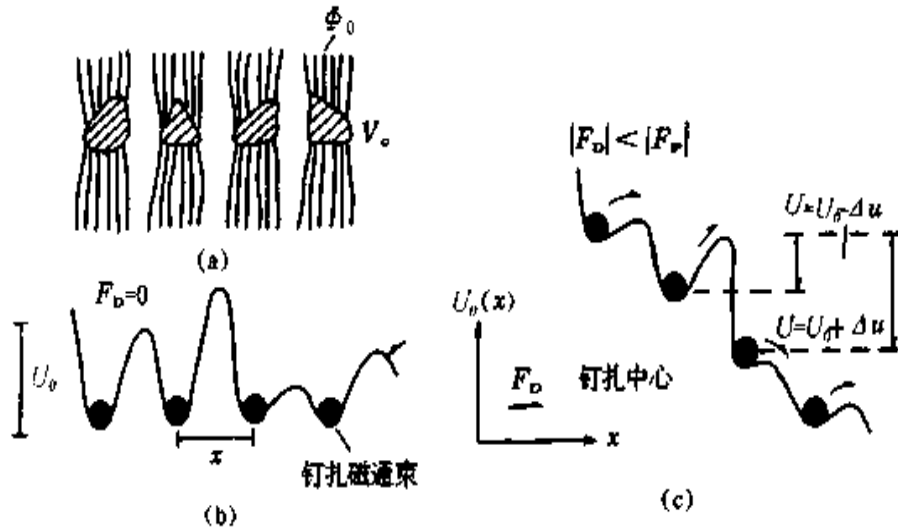
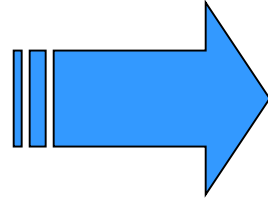
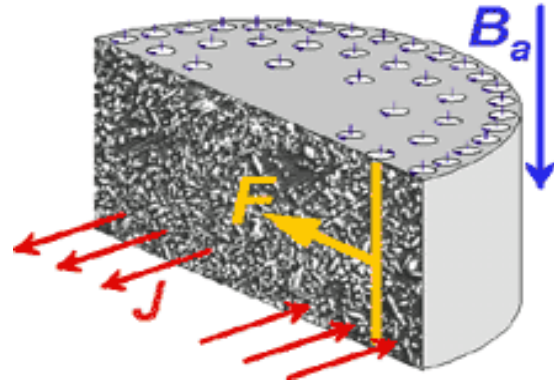


☞ 悬浮力最大值不在中心位置；悬浮力和导向力均先增大后减小；悬浮力和导向力面内均存在各向异性

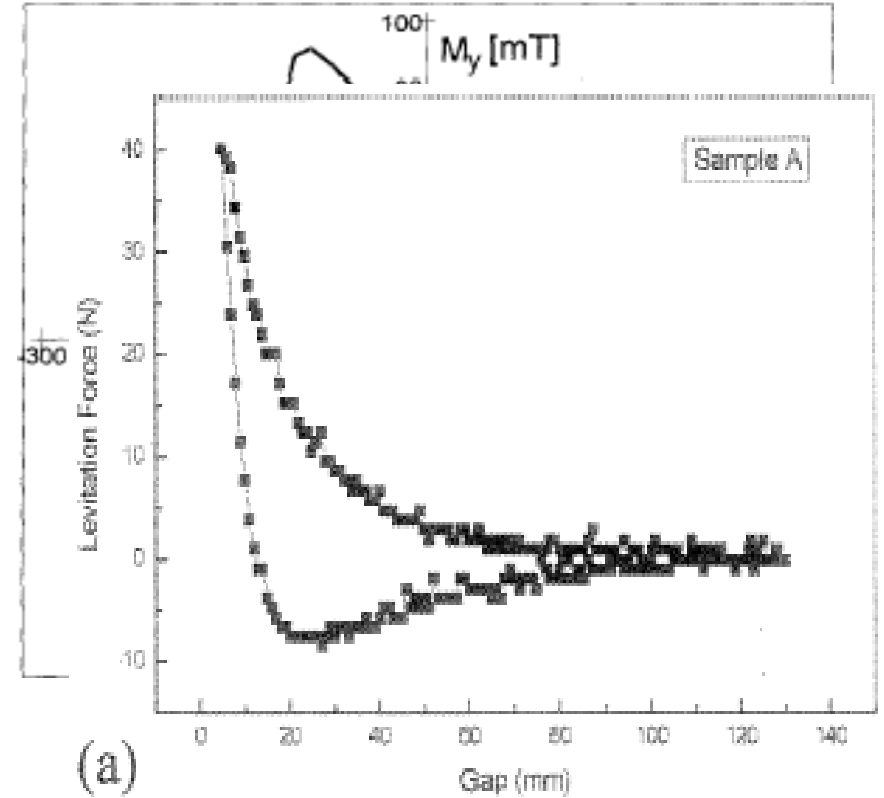
高温超导悬浮系统

➤ 高温超导体
YBCO悬浮系统;

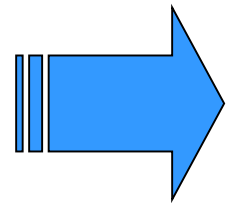
➤ 超导悬浮系统是**唯一无须输入能量且自行维持相对稳定**的物理悬浮形式。



Anderson - Kim磁通蠕动理论



悬浮力磁滞回线



Relaxation 现象 or Drift 现象

高温超导悬浮系统——基本方程



动力运动方程

永磁悬浮体受力情况

电磁作用力（矩）：

$$\mathbf{F}_{em} = \iiint_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV = F_{em}^x \mathbf{i} + F_{em}^y \mathbf{j} + F_{em}^z \mathbf{k}$$

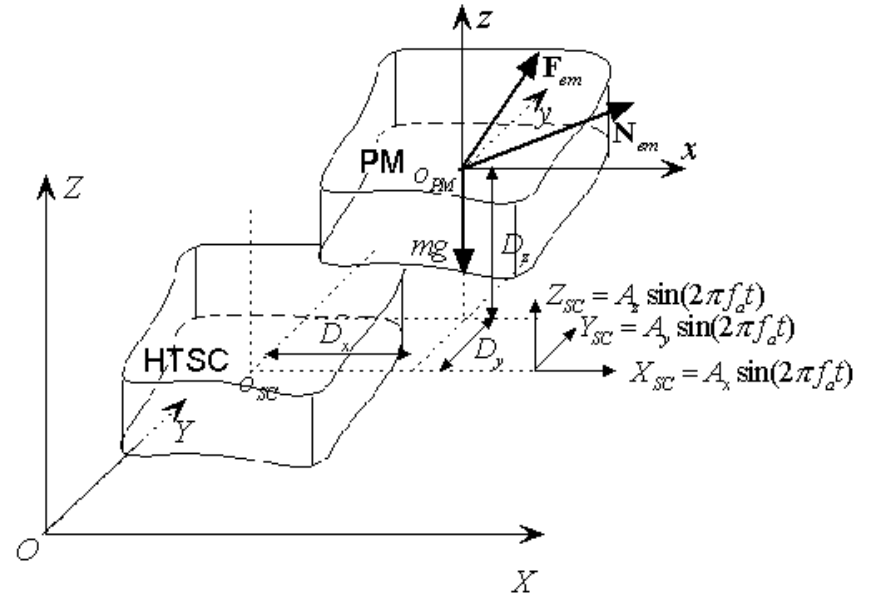
$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{em} &= \iiint_V \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \\ &= N_{em}^x \mathbf{i} + N_{em}^y \mathbf{j} + N_{em}^z \mathbf{k} \end{aligned}$$

动力运动微分方程

$$m\ddot{x} + F_d^x - F_{em}^x(x, y, z, \dot{x}) = F_a^x(t)$$

$$m\ddot{y} + F_d^y - F_{em}^y(x, y, z, \dot{y}) = F_a^y(t) \quad \text{或}$$

$$m\ddot{z} + F_d^z - F_{em}^z(x, y, z, \dot{z}) + mg = F_a^z(t)$$



$$J_x \ddot{\phi}_x = (J_y - J_z) \dot{\phi}_y \dot{\phi}_z + N_{em}^x(x, y, z, \phi_x)$$

$$J_y \ddot{\phi}_y = (J_z - J_x) \dot{\phi}_z \dot{\phi}_x + N_{em}^y(x, y, z, \phi_y)$$

$$J_z \ddot{\phi}_z = (J_x - J_y) \dot{\phi}_x \dot{\phi}_y + N_{em}^z(x, y, z, \phi_z)$$

+ 初值条件

永磁体动力运动初值问题

✓ 超导体为非理想 II 类超导体，并且总认为其一直处于超导状态

✓ 永磁体的磁场不受超导电流所产生磁场的影响

✓ 永磁体的磁场不受温度变化的影响

✓ 忽略超导体本身变形的影响，即认为超导体为刚体

高温超导悬浮系统——基本方程



电磁场基本方程

Maxwell方程组

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{D} &= q \\ \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial q}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

边界条件

$$\begin{aligned}[\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}] &= q_s & [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] &= \mathbf{0} \\ [\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] &= 0 & [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] &= \boldsymbol{\alpha}_s \\ [\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}] + \frac{\partial q_s}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

初值条件

$$\begin{aligned}\mathbf{D}|_{t=0} &= \mathbf{D}_0 & \mathbf{E}|_{t=0} &= \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}|_{t=0} &= \mathbf{B}_0 & \mathbf{H}|_{t=0} &= \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{J}|_{t=0} &= \mathbf{J}_0\end{aligned}$$

一般超导电磁本构关系

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, T) = 0$$

理想超导体的电磁本构关系

二流体模型

$$\begin{aligned}N &= N_s + N_n \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_n\end{aligned}$$

伦敦方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} &= \alpha \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{J}_s &= -\alpha \mathbf{B}\end{aligned}$$

高温超导悬浮系统——基本方程



基本的超导本构模型

强非线性

✓ 一般意义上的超导本构函数关系

$$\mathbf{E} = f(|\mathbf{J}|) \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|}$$

✓ 临界态模型

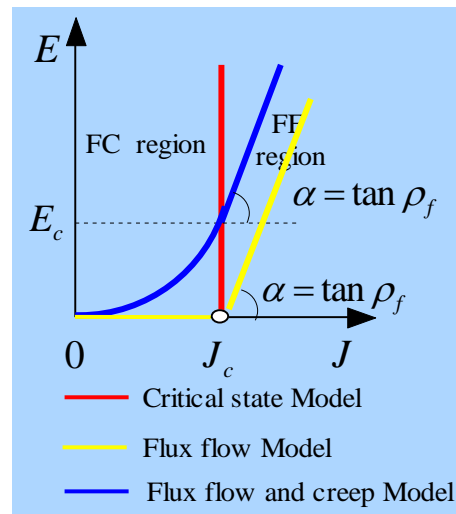
$$f(|\mathbf{J}|) = E = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \\ \text{arbitrary value} & \text{if } J = J_c(|\mathbf{B}|, T) \end{cases}$$

✓ 磁通流动模型

$$f(|\mathbf{J}|) = E = \begin{cases} 0 & 0 \leq |\mathbf{J}| < J_c(|\mathbf{B}|, T) \\ \rho_f J_c(|\mathbf{B}|, T) \left(\frac{|\mathbf{J}|}{J_c(|\mathbf{B}|, T)} - 1 \right) & |\mathbf{J}| \geq J_c(|\mathbf{B}|, T) \end{cases}$$

✓ 磁通流动与蠕动模型

$$f(|\mathbf{J}|) = E = \begin{cases} 2E_c \sinh\left(\frac{U_0}{k\theta} \frac{|\mathbf{J}|}{J_c(|\mathbf{B}|, T)}\right) \exp\left(-\frac{U_0}{k\theta}\right) & 0 \leq |\mathbf{J}| \leq J_c(|\mathbf{B}|, T) \\ E_c + \rho_f J_c(|\mathbf{B}|, T) \left(\frac{|\mathbf{J}|}{J_c(|\mathbf{B}|, T)} - 1 \right) & |\mathbf{J}| > J_c(|\mathbf{B}|, T) \end{cases}$$



$J_c(B, T)$ 的关系

✓ Bean 形式

$$J_c(B, T) = J_c(T)$$

✓ Kim 形式

$$J_c(B, T) = J_c(T) / (1 + B / B_0)$$

✓ 指数形式

$$J_c(B, T) = J_c(T) \exp(-B / B_0)$$

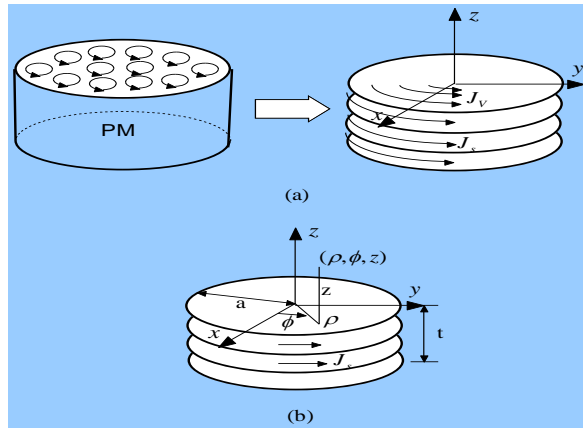
✓ 一般表达形式

$$J_c(B, T) = J_c(T) / [1 + B / B_0]^\beta$$

永磁体外部磁场的计算

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \mathbf{e}_r + 0 \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \mathbf{e}_z$$

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \phi + z^2}}$$



根据电荷守恒定律引入电流矢量 \mathbf{T} 满足 $\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{J}$ Maxwell第二方程可写为

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma_s} (\nabla \times \mathbf{T}) = -\frac{\partial (\mathbf{B}_{sc} + \mathbf{B}_{ex})}{\partial t}$$

$$\begin{cases} B_\rho(\rho, z) = \frac{\mu_0 J_s a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' \int_{-t}^0 \frac{(z-z')}{[a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \phi + (z-z')^2]^{3/2}} dz' \\ B_\phi(\rho, z) = 0 \\ B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0 J_s a}{4\pi \rho} \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \int_{-t}^0 \frac{a^2 + (z-z')^2 - a\rho \cos \phi}{[a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \phi + (z-z')^2]^{3/2}} dz' \end{cases}$$

进而根据Helmholtz定理和Biot-Savart's定律, 并利用相应的边值条件

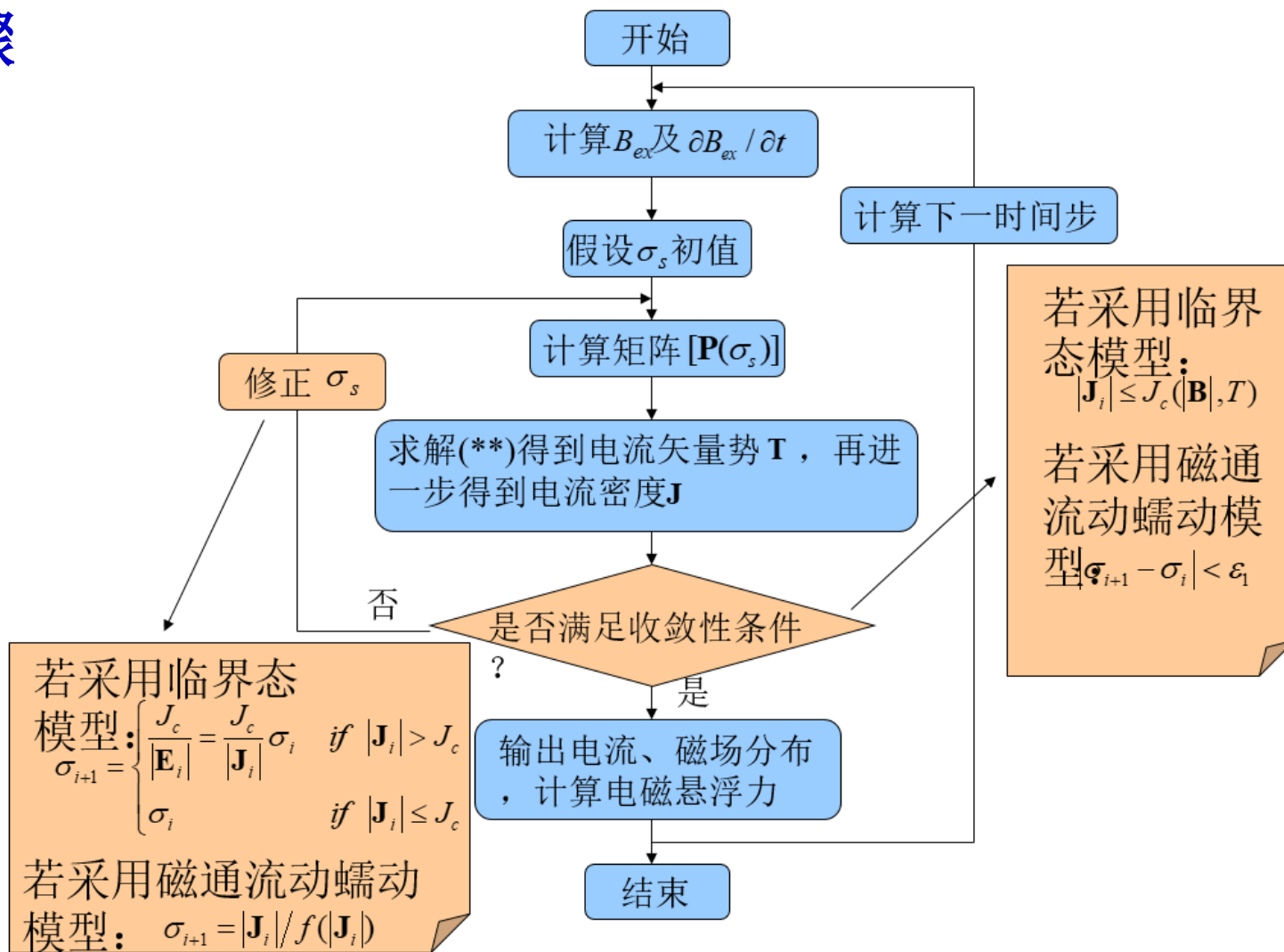
$$\mathbf{B}_{sc} = \mu_0 \mathbf{T} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \nabla' \frac{1}{R(P, P')} dS'$$

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma_s} \nabla \times \mathbf{T} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\partial (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})}{\partial t} \nabla' \frac{1}{R(P, P')} dS' + \frac{\partial \mathbf{B}_{ex}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

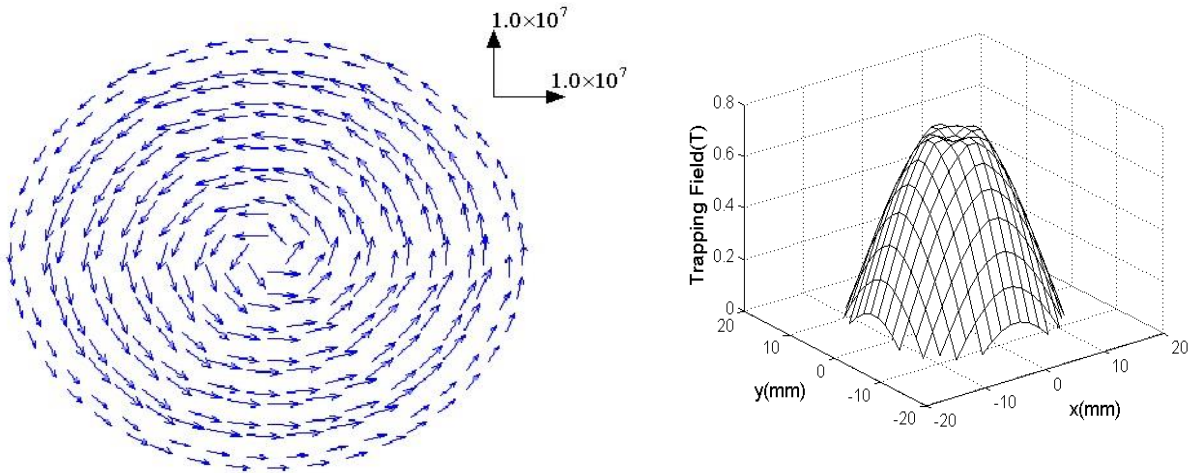
高温超导悬浮系统——数值模拟



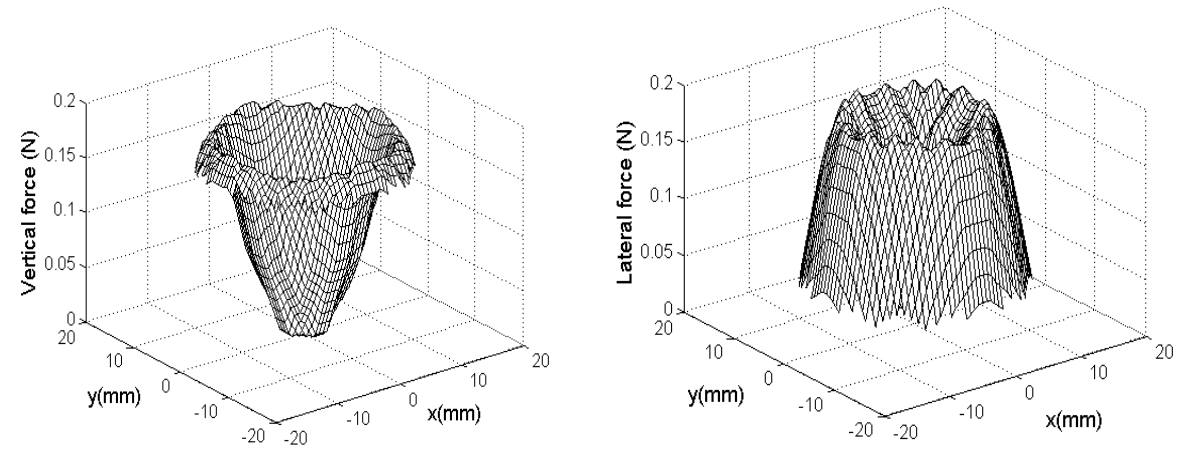
数值计算步骤



► 超导电磁场、电磁力分布



悬浮高度为1mm时，离永磁体最近一层中电流密度和横向磁场分布



悬浮高度为1mm时，离永磁体最近一层中电磁力分布

- 这些数值结果是通过实验无法得到的；
- 给出了超导内部电磁力空间分布，这为进一步研究超导块体强度问题奠定了基础。



谢谢各位!